1. Trouver la loi d'un temps d'attente...

Tous les schémas ne sont pas des schémas de Bernoulli...

Exercice 1 *La loi du sauteur en hauteur - Transferts*

Dans un concours de saut, la probabilité qu'un sauteur passe la n-ème barre est $\dfrac{1}{n}$ et est indépendante des sauts précédents.
On note X le numéro de la dernière barre que le sauteur a franchi avant d'échouer.

1. Donner la loi de X et vérifier que $\sum_{x\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X=x)=1$.
2. Montrer que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ existent et les calculer. On observa qu'on a intérêt à commencer par calculer $\mathbb{E}(X+1)$, puis $E(X^2-1)$.

Solution (**Ex.1** – *La loi du sauteur en hauteur - Transferts*)

1. $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=n) \overset{\text{FPC}}{=} 1\frac{1}{2}\frac{1}{3}\dots\frac{1}{n}\frac{n}{n+1}=\frac{n}{(n+1)!}$.
2. $\mathbb{E}(X+1) \overset{\text{transfert}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!} \overset{\text{expon.}}{=} e$, $\mathbb{E}(X) \overset{\text{lin.}}{=} e-1$.
   $\mathbb{E}(X^2-1) \overset{\text{transfert}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-1)n(n+1)}{(n+1)!}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!} \overset{\text{expon.}}{=} e$, $\mathbb{E}(X^2) \overset{\text{lin.}}{=} e+1$,
   $\mathbb{V}(X)=3e-e^2$.

Exercice 2 *Sans espoir ... - Absence d'espérance*

Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche.
On procède à une succession de tirages suivant le processus : à chaque tirage, on prélève une boule au hasard et on la remet accompagnée d'une autre boule de la même couleur.
On note T le temps d'attente du premier tirage d'une boule noire.

1. Déterminer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T=n)$ et vérifier que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{P}(T=n)=1$.
2. T possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Solution (**Ex.2** – *Sans espoir ... - Absence d'espérance*)

1. $\mathbb{P}(T=n) \overset{\text{FPC}}{=} \frac{1}{2}\frac{2}{3}\dots\frac{n-1}{n}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$.
2. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+1}$ diverge, $\mathbb{E}(X)$ n'existe pas.

Exercice 3 *Urne de Polya*

On dispose d'une urne contenant $n\geqslant 2$ boules dont une est rouge et les autres sont blanches.
On tire au hasard une à une des boules dans cette urne suivant le protocole :
☞ si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne pour le tirage suivant ; ☞ si la boule tirée est blanche, on l'ôte de l'urne avant de procéder au tirage suivant.
On note T le temps d'attente de la boule rouge, c'est-à-dire le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la rouge pour la première fois.
Déterminer la loi de T, son espérance et sa variance.

Solution (**Ex.3** – *Urne de Polya*)

$T(\Omega)=[\![1\,;\,n]\!]$ et
$\mathbb{P}(T=k)=\mathbb{P}(B_1\cap\dots\cap B_{k-1}\cap R_k) \overset{\text{FPC}}{=} \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\dots\frac{n-k+1}{n-k+2}\frac{1}{n-k+1}$
$\mathbb{P}(T=k)=\frac{1}{n}$
Donc $T\sim\mathcal{U}([\![1\,;\,n]\!])$ et $\mathbb{E}(T)=(n+1)/2$, $\mathbb{V}(T)=(n^2-1)/12$.

Exercice 4 *La loi de Pascal - I*

On s'intéresse à un schéma de Bernoulli (ou processus bernoullien) de probabilité de succès p.
Pour tout i de $\mathbb{N}^*$ on note T_i la variable aléatoire égale au rang d'obtention du $i-$ème succès et S_i l'évènement « *la $i-$ème épreuve est un succès* ».
Dans cet exercice, on vérifie rigoureusment l'idée intuitive de T_i est la somme de i variables i.i.d. de loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i\geqslant 1$.
   a) Déterminer le support de T_i.
   b) Déterminer pour $k\in T_i(\Omega)$ la probabilité $\mathbb{P}_{S_k}(T_i=k)$ et en déduire la loi de T_i.
2. Soit $i\geqslant 1$.
   a) Déterminer la loi de la variable aléatoire G_i définie par
   $$G_1=T_1,\text{ et pour } i\geqslant 2,\quad G_i=T_i-T_{i-1}.$$
   Commenter.
   b) En déduire l'espérance de T_i.
3. Soit $i\geqslant 2$.
   a) Montrer que T_{i-1} et G_i sont indépendantes.
   b) En déduire la variance de T_i.
4. Soit $k\in T_2(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de T_1 sachant $[T_2=k]$.
   Commentaire ?

Solution (**Ex.4** – *La loi de Pascal - I*)

1. a) Soit $i \geqslant 1$. $\mathrm{T}_i(\Omega) = [[i, +\infty[[$

b) $\mathbb{P}_{\mathrm{S}_k}(\mathrm{T}_i = k) = \mathbb{P}($ « $i-1$ succès en $k-1$ épreuves » $) = \binom{k-1}{i-1} p^{i-1} q^{k-i}$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}_i = k) \overset{\text{FPT}}{=} \mathbb{P}(\mathrm{S}_k)\mathbb{P}_{\mathrm{S}_k}(\mathrm{T}_i = k) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{S}_k})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{S}_k}}(\mathrm{T}_i = k) = p\binom{k-1}{i-1} p^{i-1} q^{k-i} + 0 = \binom{k-1}{i-1} p^{i} q^{k-i}.$$

2. Soit $i \geqslant 2$.

a) $\mathrm{G}_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{G}_i = k) \overset{\text{FPT}}{=} \sum_{j=i-1}^{+\infty} \mathbb{P}([\mathrm{T}_{i-1} = j] \cap [\mathrm{G}_i = k]) = \sum_{j=i-1}^{+\infty} \mathbb{P}([\mathrm{T}_{i-1} = j] \cap \overline{\mathrm{S}_{j+1}} \cap \overline{\mathrm{S}_{j+2}} \cap \cdots \cap \mathrm{S}_{j+k}) = \sum_{j=i-1}^{+\infty} \mathbb{P}([\mathrm{T}_{i-1} = j] q^{k-1} p = q^{k-1} p \times 1$$ par indépendance des épreuves.

Donc $\mathrm{G}_i \sim \mathcal{G}(p)$.

$\mathrm{T}_i = \mathrm{T}_{i-1} + \mathrm{G}_i$ où $\mathrm{G}_i \sim \mathcal{G}(p)$: chaque nouveau succès est régi par une attente suivant une loi géométrique.

b) $\mathbb{E}(\mathrm{T}_i) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=2}^{i} (\mathrm{T}_j - \mathrm{T}_{j-1}) + \mathrm{T}_1\right) \overset{lin.}{=} \sum_{j=1}^{i} \mathbb{E}(\mathrm{G}_j) = \frac{i}{p}$.

3. Soit $i \geqslant 2$.

a) $\mathbb{P}([\mathrm{T}_{i-1} = j] \cap [\mathrm{G}_i = k]) = \mathbb{P}([\mathrm{T}_{i-1} = j] \cap \overline{\mathrm{S}_{j+1}} \cap \overline{\mathrm{S}_{j+2}} \cap \cdots \cap \mathrm{S}_{j+k}) = \mathbb{P}([\mathrm{T}_{i-1} = j] q^{k-1} p = \mathbb{P}([\mathrm{T}_{i-1} = j]\mathbb{P}([\mathrm{G}_i = k])$

b) $\mathbb{V}(\mathrm{T}_i) = \mathbb{V}\left(\sum_{j=2}^{i} (\mathrm{T}_j - \mathrm{T}_{j-1}) + \mathrm{T}_1\right) \overset{lin.}{=} \sum_{j=1}^{i} \mathbb{V}(\mathrm{G}_j) = \frac{iq}{p^2}$.

4. $\mathbb{P}_{[\mathrm{T}_2 = k]}(\mathrm{T}_1 = n) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{T}_1 = n, \mathrm{T}_2 = k)}{}$ Soit $k \in \mathrm{T}_2(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de T_1 sachant $[\mathrm{T}_2 = k]$.
Commentaire ?

2. Lois de sommes sans les fonctions génératrices

Lorsqu'on calcule la loi de la somme de deux variables indépendantes, on parle de *convolution*. Le calcul **lorsqu'on n'utilise pas les fonctions génératrices** repose en général sur

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k) = \sum_{i \in \mathrm{X}(\Omega)\ tq\ k-i \in \mathrm{Y}(\Omega)} \mathbb{P}(\mathrm{X} = i)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k - i).$$

Expliquer rigoureusement cette formule !

Exercice 5 *Autour des lois binomiales et de Poisson*

1. Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(l)$ et $\mathcal{P}(m)$ respectivement.
   a) Montrer que la loi de X + Y est encore une loi de Poisson en précisant son paramètre.
   b) Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = n)$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Montrer que si Y est une v.a.r. suivant la loi Poisson $\mathcal{P}(l)$ et si, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi de X conditionnée par $(\mathrm{Y} = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Solution (**Ex.5** – *Autour des lois binomiales et de Poisson*)

1. Pour $k > n$, $\mathbb{P}_{[\mathrm{X+Y}=n]}(\mathrm{X} = k) = 0$ (fatalement).

Pour $0 \leq k \leq n$, $\mathbb{P}_{[\mathrm{X+Y}=n]}(\mathrm{X} = k) = \frac{\mathbb{P}((\mathrm{X} = k) \cap (\mathrm{Y} = n - k))}{\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = n)} = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{X} = k)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n - k)}{\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = n)} = \frac{\mathrm{e}^{-l} l^k}{k!} \frac{\mathrm{e}^{-m} m^{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!}{\mathrm{e}^{-(l+m)} l^n} =$

$\binom{n}{k} \left(\frac{l}{l+m}\right)^k \left(\frac{m}{l+m}\right)^{n-k}$ ... loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{l}{l+m}\right)$, non ?

2. La FPT pour le SCE $([\mathrm{Y} = n])_{n \in \mathbb{N}}$ donne

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y} = n)\mathbb{P}_{[\mathrm{Y}=n]}(\mathrm{X} = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{e}^{-l} \frac{l^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\mathrm{e}^{-l}}{k!} (pl)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{[l(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} \overset{i=n-k}{=} \frac{\mathrm{e}^{-l}}{k!} (pl)^k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{[l(1-p)]^i}{i!} = \frac{\mathrm{e}^{-l} \mathrm{e}^{l(1-p)} (lp)^k}{k!} = \frac{\mathrm{e}^{-lp} (lp)^k}{k!}$$ donc $\mathrm{X} \sim \mathcal{P}(l)$.

Exercice 6 *Loi de Pascal - II*

Soit X et Y deux VAR i.i.d. de loi géométrique de paramètre $p \in]\,0\,;\ 1[$.
Déterminer la loi de X + Y.

3. Autour des minimums ou des maximums

Exercice 7 *Minimum de deux variables géométriques par deux méthodes*

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes toutes deux de loi géométrique de paramètre $p \in]\,0\,;\ 1[$.
On pose $\mathrm{Z} = \min(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. L'objectif est de déterminer la loi de Z.

1. *Première méthode*

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{P}(X \geq k)$? En déduire $\mathbb{P}(Z \geq k)$ puis montrer que Z suit une loi usuelle dont on précisera le paramètre.

2. *Seconde méthode*
On lance indéfiniment simultanément deux pièces, l'une argentée et l'autre dorée, ayant toutes deux la probabilité p d'amener pile. On note A et D respectivement le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile avec la pièce argentée, respectivement avec la pièce dorée.
a) Quel est la loi de A et de D ?
b) Quel est la probabilité de l'événement « le premier lancer amène au moins un pile » ?
c) On note P le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile, sans distinction de couleur. Quel est la loi de P ?
d) Conclure.

Solution (**Ex.7** – *Minimum de deux variables géométriques par deux méthodes*)
Soit $q = 1 - p$.

1. *Première méthode*
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \geq k) = q^{k-1}$ ($k-1$ échecs successifs).
$\mathbb{P}(Z \geq k) = \mathbb{P}([X \geq k] \cap [Y \geq k]) \overset{\text{indép.}}{=} q^{k-1}q^{k-1} = q^{2k-2}$.
$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \geq k) - \mathbb{P}(Z \geq k+1) = q^{2k-2} - q^{2k} = \left(q^2\right)^{k-1}(1-q^2)$ ce qui prouve que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2 = p(2-p)$.

2. *Seconde méthode*
On lance indéfiniment simultanément deux pièces, l'une argentée et l'autre dorée, ayant toutes deux la probabilité p d'amener pile. On note A et D respectivement le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile avec la pièce argentée, respectivement avec la pièce dorée.
a) La loi de A et de D est $\mathcal{G}(p)$.
b) Soit B l'événement « le premier lancer amène au moins un pile ».
$\mathbb{P}(\overline{B}) \overset{\text{indép.}}{=} q^2$, donc $\mathbb{P}(B) = 1 - q^2$.
c) La loi de P est $\mathcal{G}(\mathbb{P}(B)) = \mathcal{G}(1-q^2)$.
d) $P = \min(A, D)$: on retrouve le même résultat.

Exercice 8 *Maximum de deux variables géométriques*
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre $p \in]\,0\,;\ 1[$.
Soit $Z = \sup(X, Y)$.
Déterminer la loi de Z, vérifier que $\displaystyle\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}(Z = k) = 1$ et calculer son espérance.

Solution (**Ex.8** – *Maximum de deux variables géométriques*)
Posons $q = 1 - p$.
• $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$\mathbb{P}(Z \leq k) = \mathbb{P}([X \leq k] \cap [Y \leq k]) \overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(X \leq k)\mathbb{P}(Y \leq k)$
or $\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(Y > k) = (1-p)^k$ (les k premières expériences sont des échecs), donc $\mathbb{P}(Z \leq k) = \left(1 - q^k\right)^2$ (y compris pour $k = 0$... remarque pour ce qui va suivre).
Enfin, $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \leq k) - \mathbb{P}(Z \leq k-1) = (1-q^k)^2 - (1-q^{k-1})^2$
$\mathbb{P}(Z = k) = 2q^{k-1} - 2q^k + q^{2k} - q^{2k-2} = 2pq^{k-1} - (q^2)^{k-1}(1-q^2)$
• De $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ pour $r \in]\,0\,;\ 1[$, on tire :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k) = 2p \times \frac{1}{1-p} - (1-q^2) \times \frac{1}{1-q^2} = 1.$$
• De $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$ pour $r \in]\,0\,;\ 1[$ (obtenue par dérivation de la série géométrique), on tire :
$\mathbb{E}(Z)$ existe et
$$\mathbb{E}(Z) = 2p \times \frac{1}{p^2} - (1-q^2) \times \frac{1}{(1-q^2)^2} = \frac{2}{p} - \frac{1}{2p-p^2} = \frac{3-2p}{p(2-p)}.$$

Exercice 9 *Maximum de variables uniformes*
Soit $m \geqslant 2$. Soit $n \geqslant 2$ et $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ n variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[\![1\,;\ m]\!]$.
On note S_n la variable aléatoire égale à la plus grande des n variables X_i. Autrement dit
$$\forall \omega \in \Omega, \qquad S_n(\omega) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (X_i(\omega)).$$

1. Dans le cas où $n = 2$, déterminer la loi de S_2, ainsi que son espérance et sa variance.
2. On revient au cas général où $n \geqslant 2$.
a) Déterminer $\mathbb{P}(S_n = m)$.
b) En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(S_n)$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{V}(S_n)$. Commenter.

4. Autour des variables indicatrices

Exercice 10 *Produit de Bernoulli - Corrélation*
1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Que peut-on dire de X^2 ?

2. Soit $p \in]0\,;\,1[$. On effectue une suite de lancer d'une pièce amenant " pile " avec la probabilité p et on note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
• X_k la variable indicatrice de l'événement « le $k-$ème lancer donne " pile " »,
• Y_k la variable indicatrice de l'événement « les $k-$ème et $(k+1)-$ème lancers donnent tous les deux " pile " ».
Pour tous k et j dans $\mathbb{N}^*$, calculer la covariance $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_j)$.

Solution (**Ex.10** – *Produit de Bernoulli - Corrélation*)

1. $X(\Omega) = \{0;1\}$ donc X^2 ne peut prendre que les valeurs $0^2 = 0$ et 1^2.
De plus : $\big(X = 0 \Longleftrightarrow X^2 = 0\big)$ et $\big(X = 1 \Longleftrightarrow X^2 = 1\big)$.
Donc finalement $X^2 = X$ (et en particulier $X^2 \sim \mathcal{B}(p)$)

2. Soient k et j dans $\mathbb{N}^*$. On a :$Y_k = X_kX_{k+1}$ et $Y_j = X_jX_{j+1}$.
•Si $j \neq k-1$ *et* $j \neq k$ *et* $j \neq k+1$, alors les variables X_k, X_{k+1}, X_j et X_{j+1} sont 4 variables distinctes indépendantes, donc $Y_k = X_kX_{k+1}$ et $Y_j = X_jX_{j+1}$ sont indépendantes et leur covariance est nulle. Donc $\rho(Y_k, Y_j) = 0$.
•Si $j = k$, alors $Y_j = Y_k$, $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_j) = \mathbb{V}(Y_k)$, $\sigma(Y_k)\sigma(Y_j) = \sigma(Y_k)^2 = \mathbb{V}(Y_k)$, $\rho(Y_k, Y_j) = 1$. Ceci n'est pas surprenant puisqu'il y a un lien affine évident entre Y_k et Y_j : $Y_j = 1 \times Y_k + 0$...
•Si $j = k+1$, alors $Y_kY_j = X_kX_{k+1}^2X_{k+2} = X_kX_{k+1}X_{k+2}$.
Par indépendance, $\mathbb{E}(Y_kY_j) = \mathbb{E}(X_kX_{k+1}X_{k+2} = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_{k+1})\mathbb{E}(X_{k+2}) = p^3$ et toujours par indépendance $\mathbb{E}(Y_k) = \mathbb{E}(X_kX_{k+1}) = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_{k+1}) = p^2$. Donc $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_j) = p^3 - p^4 = p^3(1-p)$.
Calculons $\mathbb{V}(Y_k)$. $Y_k(\Omega) = \{0;1\}$ et $\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}((X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 1)) = \mathbb{P}(X_k = 1)\mathbb{P}(X_{k+1} = 1)$ par indépendance, donc $\mathbb{P}(Y_k = 1) = p^2$ et $Y_k \sim \mathcal{B}(p^2)$. Par conséquent, $\mathbb{V}(Y_k) = p^2(1-p^2)$. Il en est de même pour Y_j : $Y_j \sim \mathcal{B}(p^2)$.
Alors $\sigma(Y_k)\sigma(Y_j) = \sqrt{p^2(1-p^2)}\sqrt{p^2(1-p^2)} = p^2(1-p^2)$. Finalement $\rho(Y_k, Y_j) = \dfrac{p^3(1-p)}{p^2(1-p^2)} = \dfrac{p(1-p)}{(1-p)(1+p)} = \dfrac{p}{1+p}$.
•Si $j = k-1$, alors $k = j+1$ et en permutant les rôles de k et j dans ce qui précède, on obtient encore $\rho(Y_k, Y_j) = \dfrac{p}{1+p}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 11}}$ *Étude de la loi hypergéométrique*

On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant N boules, de couleur bleue ou rouge. On note p la proportion de boules bleues dans l'urne et q la proportion de boules rouges, de sorte que

$$p, q \in [0\,;\,1]\,,\quad p+q = 1,\quad \mathrm{N}p \in [\![0\,;\,\mathrm{N}]\!]\,,\quad \mathrm{N}q \in [\![0\,;\,\mathrm{N}]\!] \quad et \quad \mathrm{N}p + \mathrm{N}q = \mathrm{N}.$$

Soit $n \in [\![1\,;\,\mathrm{N}]\!]$. On prélève dans l'urne **simultanément ou**, ce qui revient au même dans cette expérience, **successivement sans remise**, n boules dans $\mathcal{U}$ et on note X le nombre de boules bleues ainsi prélevées.

1. a) Justifier que $X(\Omega) \subset [\![0\,;\,n]\!]$, puis que

$$X(\Omega) = [\![\,max(0, n - \mathrm{N}q)\,;\,min(n, \mathrm{N}p)]\!]\,.$$

b) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
c) Soit $k \in [\![0\,;\,n]\!]$. Montrer que, parmi ces tirages, il y en a exactement $\dbinom{\mathrm{N}p}{k}\dbinom{\mathrm{N}q}{n-k}$ contenant exactement k boules bleues.
Cette valeur est-elle valable lorsque $k > \mathrm{N}p$? Et lorsque $k < n - \mathrm{N}q$?

2. Justifier que :

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!]\,, \mathbb{P}(X = k) = \frac{\dbinom{\mathrm{N}p}{k}\dbinom{\mathrm{N}q}{n-k}}{\dbinom{\mathrm{N}}{n}}.$$

On dit que X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p,
et on note $X \sim \mathcal{H}(\mathrm{N}, n, p)$.

3. En déduire la **formule de Van der Monde** :

$$\forall (b, r) \in (\mathbb{N}^*)^2,\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{b}{k}\binom{r}{n-k} = \binom{b+r}{n}.$$

On suppose de plus les boules bleues numérotées de 1 et Np. Pour tout i de $[\![1\,;\,\mathrm{N}p]\!]$, on note B_i la variable indicatrice de l'événement :
« la boule bleue de numéro i a été tirée ».

4. a) Justifier que, pour tout i de $[\![1\,;\,\mathrm{N}p]\!]$, B_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{n}{\mathrm{N}}$.
b) En déduire l'espérance de X.

5. a) Montrer que, pour tout i et j de $[\![1\,;\,\mathrm{N}p]\!]$ distincts, B_iB_j suit une loi de Bernoulli, et préciser son paramètre.
b) En déduire, pour tout i et j de $[\![1\,;\,\mathrm{N}p]\!]$ distincts, la covariance de B_i et B_j.
c) En déduire la variance de X.

6. On considère deux variables U et V indépendantes de loi respective $\mathcal{B}(u;p)$ et $\mathcal{B}(v;p)$. Soit $k \in [\![0\,;\,u+v]\!]$.
Montrer par le calcul que la loi conditionnelle de U conditionnée par l'événement $[U + V = k]$ est hypergéométrique de paramètres $u+v$, k et $\dfrac{u}{u+v}$.

5. Avec des fonctions génératrices

Exercice 12 *Stabilité des lois binomiales et de Poisson*

1. Soit X et Y indépendantes de loi respective $\mathcal{B}(m,p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$. Déterminer la loi de $X+Y$ à l'aide des fonctions génératrices.
2. Soit X et Y indépendantes de loi respective $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Déterminer la loi de $X+Y$ à l'aide des fonctions génératrices.

Exercice 13 *Binomiale et parité*

On dispose de $2n+1$ jetons dont une face est noire et l'autre blanche. On lance simultanément ces jetons.

1. On note B et N respectivement le nombre de faces blanches et noires obtenues. Quelle loi suivent les variables aléatoires B et N ?
2. a) Expliquer pourquoi une seule des deux couleurs apparaît un nombre impair de fois.
   b) X désigne la variable aléatoire égale à ce nombre impair. Calculer la loi de X.
3. a) Exprimer la fonction génératrice de X, notée G_X, à l'aide de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{2n+1} - (1-x)^{2n+1}$.
   b) En déduire l'espérance et la variance de X.

Solution (**Ex.13** – *Binomiale et parité*)

1. B et N suivent $\mathcal{B}(2n+1, 1/2)$ (par définition de cette loi).
2. a) En notant B et N respectivement le nombre de faces blanches et noires obtenues, $B+N = 2n+1$ est impair, ce qui est impossible si B et N sont tous les deux pairs, ou tous les deux impairs. Donc un, et un seul, des deux nombres B et N est impair.
   b) • $X(\Omega) = \left\{2k+1, k \in [\![0\,;\, n]\!] \right\}$.
   • Pour tout k de $[\![0\,;\, n]\!]$, $[X = 2k+1] = [B = 2k+1] \cup [N = 2k+1]$, cette réunion étant disjointe.
   Par additivité :
   $$\mathbb{P}(X = 2k+1) = 2 \times \binom{2n+1}{2k+1} \frac{1}{2^{2k+1}} \frac{1}{2^{2n+1-2k-1}} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n+1}{2k+1}$$
3. a) Par la formule du binôme :
   $$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k x^k = 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} x^k.$$
   Donc $G_X(x) = \dfrac{1}{2^{2n+1}} f(x)$.
   b) $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \dfrac{1}{2^{2n+1}} f'(1) = \dfrac{(2n+1)2^{2n}}{2^{2n+1}} = \dfrac{2n+1}{2}$.
   $$\mathbb{E}(X(X-1)) = G''_X(1) = \frac{(2n+1)2n}{4},$$
   $$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X^2) = \frac{2n(2n+1) + 4n + 2 - (2n+1)^2}{4} = \frac{2n+1}{4}.$$

6. Autour de l'espérance par antirépartition

Exercice 14 *Large sera la chute !*

On tire indéfiniment au hasard et avec remise des jetons dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On note $(u_i)_{i \geqslant 1}$ la suite infinie des numéros obtenus.
On s'intéresse au temps T_n d'attente de la première chute large définie précisément par

$$[T_n = k] \text{ signifie que :} \quad u_1 < u_2 < \cdots < u_{k-1} \geqslant u_k$$

1. Préciser $T_n(\Omega)$ et déterminer pour tout k de $\mathbb{N}$ la probabilité $\mathbb{P}(T_n > k)$.
2. En déduire l'existence et la valeur de l'espérance de T_n.

Solution (**Ex.14** – *Large sera la chute !*)

1. $T_n(\Omega) = [\![2\,;\, n+1]\!]$.
   Soit $k \in [\![2\,;\, n]\!]$. Jusqu'au rang k inclus, il y a n^k tirages possibles. Les tirages favorables à $[T_n > k]$ sont les $k-$listes $(u_1, \ldots, u_k)$ strictement croissantes. Une telle liste se construit en choisissant k jetons distincts et en les plaçant nécessairement en ordre croissant. Il y a donc $\binom{n}{k}$ cas favorables. Donc $\mathbb{P}(T_n > k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$.
   On observe enfin que cette formule est encore valable pour $k \in \{0, 1\}$ pour lequel $\mathbb{P}(T > k) = 1$, et pour $k \geqslant n+1$ pour lequel $\mathbb{P}(T > k) = 0$.
2. Comme $T_n(\Omega)$ est fini, T_n admet une espérance finie.
   Comme $T_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$,
   $$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \overset{\text{Newton}}{=} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

7. Un exemple d'étude de couple et de transfert par double somme

Exercice 15 *Longueurs de séries : l'art des sommations géométriques.*

On effectue une succession de lancers indépendants avec une pièce donnant *« pile »* avec la probabilité $p \in]\,0\,;\, 1\,[$ et *« face »* avec la probabilité $q = 1-p$.
On dit que la première série est de longueur $L_1 = n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ème l'autre.
On définit de manière analogue la longueur L_2 de la 2-ème série.

Par exemple, si les premiers lancers donnent *pile-pile-face-pile-...* alors $L_1 = 2$ et $L_2 = 1$ tandis que si les premiers lancers donnent *face-pile-pile-...* alors $L_1 = 1$ et $L_2 \geqslant 2$ mais on ne connaît pas encore la valeur exacte de L_2.

1. *Calculs préliminaires -*

Pour $r \in]0\,;\,1[$, que valent $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^k$, $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)r^{k-2}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 r^k$?

2. a) Déterminer la loi de L_1, son espérance et sa variance.

b) Pour quelle valeur de p $\mathbb{E}(L_1)$ est-elle minimale ? Et maximale ?

3. Déterminer la loi du couple (L_1, L_2) et en déduire la loi de L_2, son espérance et sa variance.

4. a) À quelle condition nécessaire et suffisante sur p L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?

b) Dans ce cas, quelle loi usuelle suivent L_1 et L_2 ?

5. a) Calculer par transfert $\mathbb{E}(L_1 L_2)$.

b) En déduire $\mathrm{Cov}(L_1, L_2)$.

6. a) Déterminer la loi de $L_1 + L_2$.

b) En déduire $\mathbb{E}(L_1 + L_2)$ et vérifier que $\mathbb{E}(L_1 + L_2) = \mathbb{E}(L_1) + \mathbb{E}(L_2)$.

c) Calculer $\mathbb{V}(L_1 + L_2)$ et en retrouver $\mathrm{Cov}(L_1, L_2)$.

Solution (**Ex.15** – *Longueurs de séries : l'art des sommations géométriques.*)

1. *Calculs préliminaires - Version analytique*

Par dérivation terme à terme de la série géométrique de rayon de convergence $R = 1$, pour tout $r \in]0\,;\,1[$, $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2}$, $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)r^{k-2} = \frac{2}{(1-r)^3}$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 r^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \big(k(k-1) + k\big) r^k = \frac{2r^2}{(1-r)^3} + \frac{r}{(1-r)^2} = \frac{r(r+1)}{(1-r)^3}$$

Calculs préliminaires - Version probabiliste

Comme $r \in]0\,;\,1[$, $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^{k-1}(1-r)$ est l'espérance de la loi géométrique de paramètre $1-r$: $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^{k-1}(1-r) = \frac{1}{1-r}$, donc $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2}$.

De même, $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 r^{k-1}(1-r) = \mathbb{E}(X^2)$ si X suit la loi $\mathcal{G}(1-r)$.

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 r^{k-1}(1-r) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \frac{r}{(1-r)^2} + \frac{1}{(1-r)^2} = \frac{r+1}{(1-r)^2}$.

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 r^k = \frac{r(r+1)}{(1-r)^3}$.

> Pour alléger les écritures, je note par exemple $P_1P_2F_3P_4$ l'événement « *les 4 premiers lancers donnent pile, puis pile, puis face, puis pile* ». Cet événement a pour probabilité $p^3 q$ par indépendance mutuelle des lancers.

2. a) • $L_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (P_1, F_1) donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_1 = k) &= \mathbb{P}(P_1 \cap [L_1 = k]) + \mathbb{P}(F_1 \cap [L_1 = k]) \\ &= \mathbb{P}(P_1 \dots P_k F_{k+1}) + \mathbb{P}(F_1 \dots F_k P_{k+1}) \\ &= p^k q + p q^k\end{aligned}$$

☞On vérifie sans peine par la série géométrique que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([L_1 = k]) = \frac{pq}{(1-p)} + \frac{pq}{(1-q)} = p + q = 1$$

donc L_1 est parfaitement définie car l'événement *« la première série s'arrête au bout d'un nombre fini de lancers »* est presque-certain.

• Par les calculs préliminaires, L_1 possède une espérance et une variance et

$$\mathbb{E}(L_1) = \frac{pq}{q^2} + \frac{pq}{p^2} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{p^2+q^2}{pq} = \frac{(p+q)^2 - 2pq}{pq}$$

$$\mathbb{E}(L_1) = \frac{p^2+q^2}{pq} = \frac{1}{pq} - 2.$$

$$\mathbb{E}(L_1^2) = \frac{qp(p+1)}{q^3} + \frac{pq(q+1)}{p^3} = \frac{p(p+1)}{q^2} + \frac{q(q+1)}{p^2}$$

$$\mathbb{V}(L_1) = \frac{p^3(p+1) + q^3(q+1) - \big(p^4 + 2p^2q^2 + q^4\big)}{p^2q^2}$$

$$\mathbb{V}(L_1) = \frac{p^3 + q^3 - 2p^2q^2}{p^2q^2} = \frac{p^3+q^3}{p^2q^2} - 2.$$

b) $\mathbb{E}(L_1) = \frac{1}{pq} - 2$ or $pq = p(1-p) = -p^2 + p = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ donc $0 < pq \leqslant \frac{1}{4}$ avec $pq \xrightarrow[p\to 0]{} +0$ et $pq = \frac{1}{4}$ si, et seulement si, $p = q = \frac{1}{2}$.

On en déduit que, pour $p \in]0\,;\,1[$, $\frac{1}{pq}$ est minoré par 4, atteint en $p = 1/2$ uniquement, et n'est pas majorée.

D'où $\mathbb{E}(L_1)$ est minimale pour $p = 1/2$ et vaut alors 2, et n'est pas majorée car $\mathbb{E}(L_1) \xrightarrow[p\to 0 \text{ ou } 1]{} +\infty$: pas de valeur maximale.

3. • $(L_1, L_2)(\Omega) = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et, pour tout $(j,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (P_1, F_1),

$$\mathbb{P}(L_1 = j, L_2 = k) = \mathbb{P}(P_1 \cap [L_1 = j] \cap [L_2 = k]) + \mathbb{P}(F_1 \cap [L_1 = j] \cap [L_2 = k])$$

$= \mathbb{P}(P_1\ldots P_j F_{j+1}\ldots F_{j+k}P_{j+k+1}) + \mathbb{P}(F_1\ldots F_j P_{j+1}\ldots P_{j+k}F_{j+k+1})$
$= p^{j+1}q^k + p^k q^{j+1}$

• Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([L_1 = j])_{j\in\mathbb{N}^*}$,

$\mathbb{P}(L_2 = k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_1 = j, L_2 = k) = \frac{p^2q^k}{1-p} + \frac{p^kq^2}{1-q} = p^2q^{k-1} + p^{k-1}q^2$

☞On vérifie sans peine par la série géométrique que

$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}([L_2 = k]) = \frac{p^2}{(1-q)} + \frac{q^2}{(1-p)} = p + q = 1$

donc L_2 est parfaitement définie car l'événement *« la deuxième série s'arrête au bout d'un nombre fini de lancers »* est presque-certain.

• Par les calculs préliminaires, $\mathbb{E}(L_2)$ et $\mathbb{V}(L_2)$ existent et

$\mathbb{E}(L_2) = \dfrac{p^2}{(1-q)^2} + \dfrac{q^2}{(1-p)^2} = 1 + 1 = 2$

☞ Chose surprenante *a priori*, $\mathbb{E}(L_2)$ ne dépend pas de p et q. Une explication ?

$\mathbb{E}(L_2^2) = \dfrac{p^2q(1+q)}{q(1-q)^3} + \dfrac{q^2p(1+p)}{p(1-p)^3} = \dfrac{1+q}{p} + \dfrac{1+p}{q} = \dfrac{p^2+q^2+1}{pq}$

$\mathbb{V}(L_2) = \dfrac{p^2+q^2+1}{pq} - 4 = \dfrac{p^2+q^2-4pq+1}{pq}$

4. • On a :

$\mathbb{P}(L_1 = 1, L_2 = 1) = \mathbb{P}(L_1 = 1)\mathbb{P}(L_2 = 1) \iff p^2q + pq^2 = (2pq)(p^2+q^2) \iff 1 = 2p^2 + 2q^2 \iff 1 = 4p^2 - 4p + 2 \iff p^2 - p + \dfrac{1}{4} = 0 \iff \left(p - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff p = \dfrac{1}{2}$

Donc si L_1 et L_2 sont indépendantes, alors $p = \dfrac{1}{2} = q$.

• Réciproquement, si $p = \dfrac{1}{2}$, alors pour tout $(j,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$\mathbb{P}(L_1 = j, L_2 = k) = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}$ et

$\mathbb{P}([L_1 = j]\cap[L_2 = k]) = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+1} \times 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}$

donc L_1 et L_2 sont indépendantes.

L_1 et L_2 sont indépendantes si, et seulement si, $p = q = 1/2$.

☞ On peut observer que, dans ce cas, L_1 et L_2 suivent toutes les deux des lois géométriques de paramètre $1/2$.

5. a) Déterminer la loi de $L_1 + L_2$.

• $(L_1 + L_2)(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$

• Pour tout $n \geqslant 2$,

$\mathbb{P}(L_1 + L_2 = n) = \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n-1}([L_1 = k]\cap[L_2 = n-k])\right)$, et par incompatibilité

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(L_1 = k, L_2 = n-k)$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(L_1 = k, L_2 = n-k)$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(p^{k+1}q^{n-k} + p^{n-k}q^{k+1}\right)$

Or pour $p \neq 1/2$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}p^{k+1}q^{n-k} = p^2q^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^k = p^2q^{n-1}\frac{1-(p/q)^{n-1}}{1-p/q} = \frac{p^2q^n}{q-p}\times\frac{q^{n-1}-p^{n-1}}{q^{n-1}}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}p^{k+1}q^{n-k} = \frac{p^2q}{q-p}\left(q^{n-1}-p^{n-1}\right)$, et par symétrie de p et q,

$\mathbb{P}(L_1 + L_2 = n) = \dfrac{p^2q}{q-p}\left(q^{n-1}-p^{n-1}\right) + \dfrac{q^2p}{p-q}\left(p^{n-1}-q^{n-1}\right)$

Or $\dfrac{p^2q}{q-p} - \dfrac{q^2p}{p-q} = \dfrac{p^2q+q^2p}{q-p} = \dfrac{pq}{q-p}$, donc

$\mathbb{P}(L_1 + L_2 = n) = \dfrac{p}{q-p}q^n + \dfrac{q}{p-q}p^n$

Pour $p = 1/2$, $\mathbb{P}(L_1 + L_2 = n) = (n-1)\dfrac{1}{2^n}$

b) Petit calcul préliminaire :

$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}nq^n = \frac{q}{p^2} - q = \frac{q(1-p^2)}{p^2} = \frac{q(1-p)(1+p)}{p^2} = \frac{q^2(1+p)}{p^2}$

Alors pour $p \neq 1/2$

$\mathbb{E}(L_1 + L_2) = \dfrac{1}{q-p}\left(\dfrac{q^2(1+p)}{p} - \dfrac{p^2(1+q)}{q}\right) = \dfrac{1}{q-p}\times\dfrac{1}{pq}\left(q^3 + pq^3 - p^3 - p^3q\right)$

$q^3 + pq^3 - p^3 - p^3q = (q-p)(q^2 + pq + p^2 + pq(p+q)) = (q-p)(p+q)^2 = q - p$

Donc $\mathbb{E}(L_1 + L_2) = \dfrac{1}{pq} =\ldots = \mathbb{E}(L_1) + \mathbb{E}(L_2)$ effectivement.

Et si $p = 1/2$

$\mathbb{E}(L_1 + L_2) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\frac{1}{2^n} = \frac{2}{(1/2)^3} = 4 = \frac{1}{pq}$... la formule précédente demeure.