Exercice 1 *Une fonction lipschitzienne*

Soit $(\mathrm{E}, ||.||)$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in \mathrm{E}$. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ définie par

$$f(x) = ||x||\, a.$$

Montrer que f est lipschitzienne. f est-elle continue ?

Solution (**Ex.1** – *Une fonction lipschitzienne*)

$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, ||f(x) - f(y)|| = || ||x||\, a - ||y||\, a|| = ||(||x|| - ||y||)a|| = \big|\, ||x|| - ||y||\, \big| \times ||a||$

Or *pour toute norme* $\big|\, ||x|| - ||y||\, \big| \leq ||x - y||$, donc

$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, ||f(x) - f(y)|| \leq ||a||\, ||x-y||$ et f est $||a||$ −lipschitzienne.

Question de cours : toute fonction lipschitzienne est continue...

Exercice 2 *Ouverts ou fermés*

Étudier si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$\mathrm{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < |y+1| < 1\}$, $\quad \mathrm{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x^2 + 2y^2 \leq 1\}$,

$\mathrm{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x^2 + y^4 < 0\}$, $\quad \mathrm{D} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{M} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\}$.

Solution (**Ex.2** – *Ouverts ou fermés*)

• $f : (x,y) \mapsto |y+1|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et A est l'intersection des ouverts $\mathrm{A}_0 \overset{\text{déf.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) > 0\}$ et $\mathrm{A}_1 \overset{\text{déf.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) < 10\}$ donc A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

• $\forall n \geq 2, \mathrm{M}_n \overset{\text{déf.}}{=} (1/n, 1/n) \in \mathrm{B}$ mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{M}_n = (0,0) \notin \mathrm{B}$ donc B n'est pas fermé.

$\mathrm{M} = (1,0) \in \mathrm{B}$ mais $\forall r > 0, \mathcal{B}(\mathrm{M}, r) \not\subset \mathrm{B}$ car $(1 + r/2, 0) \notin \mathrm{B}$ donc B n'est pas ouvert.

• C est vide donc C est ouvert ET fermé.

• det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue (polynôme des coefficients de la matrice) donc $\{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \det(\mathrm{M}) = 0\}$ est fermé et son complémentaire D est ouvert.

Exercice 3 *Un ouvert et un fermé dans un espace de fonctions*

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_\infty$. On se propose de démontrer que

$$\mathrm{U} = \big\{f \in \mathrm{E} / \forall x \in [0\,;\,1], f(x) > 0\big\} \text{ et } \mathrm{F} = \big\{f \in \mathrm{E} / \forall x \in [0\,;\,1], f(x) \geq 0\big\}$$

sont respectivement un ouvert et un fermé de E.

1. *Première méthode pour U –*

a) Soit $f \in \mathrm{E}$. Justifier : $\exists a \in [0\,;\,1], \forall x \in [0\,;\,1], f(x) \geq f(a)$.

b) Soit $f \in \mathrm{U}$ et a défini comme précédemment. On pose $m = f(a)$. Montrer que $\mathrm{B}(f,m)$ n'est pas vide et que $\mathrm{B}(f,m) \subset \mathrm{U}$.

c) Qu'a-t-on démontré ?

2. *Seconde méthode pour U –*

On définit la fonction φ par :

$$\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, f \mapsto \min_{x \in [0\,;\,1]} \{f(x)\}.$$

a) Justifier que φ est correctement définie.

b) Montrer que φ est continue sur E.

c) Justifier que U est un ouvert de E.

3. *Première méthode pour F –*

a) Soit (f_n) une suite de fonctions de F convergente, de limite f. Montrer que $f \in \mathrm{F}$.

b) Conclure.

4. *Seconde méthode pour F –*

Utiliser la seconde méthode de l'étude de U.

Solution (**Ex.3** – *Un ouvert et un fermé dans un espace de fonctions*)

1. a) f est continue sur le segment $[0\,;\,1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes, notamment sa borne inférieure : $\exists a \in [0\,;\,1], \forall x \in [0\,;\,1], f(x) \geq f(a)$.

b) Comme $f > 0$, $m > 0$. Donc $\mathrm{B}(f,m)$ n'est pas vide.

Soit $g \in \mathrm{B}(f,m)$. $||g - f||_\infty < m$ donc :

$\forall x \in [0\,;\,1], |g(x) - f(x)| < m$, donc $g(x) > f(x) - m$, donc $g(x) > 0$ par définition de m.

Ainsi, $g \in \mathrm{U}$. Donc $\mathrm{B}(f,m) \subset \mathrm{U}$.

c) On a démontré : $\forall f \in \mathrm{U}, \exists m > 0, \mathrm{B}(f,m) \subset \mathrm{U}$. C'est-à-dire : U est un ouvert.

2. a) Pour tout $f \in \mathrm{E}$, f est continue sur le segment $[0\,;\,1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes, notamment sa borne inférieure, donc $\min\limits_{x \in [0\,;\,1]} \{f(x)\}$ existe : φ est correctement définie.

b) Soit $f \in \mathrm{E}$. Montrons que φ est continue en f.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $g \in \mathrm{E}$ tel que $||f - g||_\infty \leq \varepsilon$.

Alors : $\forall x \in [0\,;\,1], \quad |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.

Donc : $\forall x \in [0\,;\,1], \quad f(x) - \varepsilon \leq g(x) \leq f(x) + \varepsilon$.

On en tire :

$\forall x \in [0\,;\,1], g(x) \geq \min f - \varepsilon$, donc $\min g \geq \min f - \varepsilon$, i.e. $\varphi(f) - \varphi(g) \leq \varepsilon$,

et aussi :

$\forall x \in [0\,;\,1], f(x) + \varepsilon \geq \min g$, donc $\min f + \varepsilon \geq \min g$, i.e. $\varphi(g) - \varphi(f) \leq \varepsilon$.

Ainsi : $|\varphi(f) - \varphi(g)| \leq \varepsilon$.

Donc φ est continue en f. Et comme f est quelconque dans E, φ est continue sur E.

c) $\mathrm{U} = \big\{f \in \mathrm{E} / \forall x \in [0\,;\,1], f(x) > 0\big\} = \big\{f \in \mathrm{E} / \varphi(f) > 0\big\}$ avec φ continue sur E, donc U est un ouvert de E.

3. a) Soit (f_n) une suite de fonctions de F convergente, de limite f. Montrer que $f \in \mathrm{F}$. On a : $||f_n - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la suite f_n converge uniformément donc simplement vers f.
Soit $x \in [0\,;\,1]$. $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. Or : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \geq 0$ car $f_n \in \mathrm{F}$. Par prolongement des inégalités larges à la limite : $f(x) \geq 0$.
Ainsi : $\forall x \in [0\,;\,1]\,, f(x) \geq 0$, donc $f \in \mathrm{F}$.

b) Toute suite convergente de F a sa limite dans F : F est fermé d'après la caractérisation séquentielle des fermés.

4. $\mathrm{F} = \left\{f \in \mathrm{E}/\forall x \in [0\,;\,1]\,, f(x) \geq 0\right\} = \left\{f \in \mathrm{E}/\varphi(f) \geq 0\right\}$ avec φ continue sur E, donc F est un fermé de E.