

Exercice 1 *Mouvement circulaire et orthogonalité du vecteur vitesse*

Soit I un intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto f(t)$ une fonction vectorielle dérivable \mathbb{R}^2 .

On suppose $N : t \mapsto \|f(t)\|$ constante.

Montrer que pour tout t , les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux. On pourra dériver N^2 ...

Solution (Ex.1 – Mouvement circulaire et orthogonalité du vecteur vitesse) On a $\forall t \in I$;

$$0 = \frac{d}{dt} \|f(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle f(t), f(t) \rangle = \langle f'(t), f(t) \rangle + \langle f(t), f'(t) \rangle = 2 \langle f'(t), f(t) \rangle$$

donc $f'(t) \perp f(t)$.

Exercice 2 *Exemple d'une application à valeur matricielle*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable.

1. Montrer que, pour tout t de \mathbb{R} , $f(t)^T f'(t)$ est une matrice antisymétrique.
2. Montrer que, si n est impair, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t)$ n'est pas inversible.

Solution (Ex.2 – Exemple d'une application à valeur matricielle)

1. Soit $g : t \mapsto f(t)^T f'(t)$.
 - Par bilinéarité du produit matriciel,
$$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = f'(t)^T f'(t) + f(t)^T f''(t) = (f(t)^T f''(t))^T + f(t)^T f''(t)$$
 - Mais comme $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), g(t) = I_n$ donc $g'(t) = 0_n$.

Donc pour tout t de \mathbb{R} , $f(t)^T f'(t)$ est une matrice antisymétrique.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Notons $\varepsilon = \det(f(t)) = \pm 1$.
D'une part :

$$\det(f(t)^T f'(t)) = \det(f(t)^T) \det(f'(t)) = \varepsilon \det(f'(t)),$$
 d'autre part :

$$\det(f(t)^T f'(t)) = \det(-f'(t)^T f(t)) = (-1)^n \det(f'(t)) \det(f(t))$$

$$= (-1)^n \varepsilon \det(f'(t)) = -\varepsilon \det(f'(t)) \text{ (avec } n \text{ impair !),}$$
 donc $\det(f'(t)) = 0$ et $f'(t) \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 *Mouvement sur une sphère et accélération*

Soit $E = \mathbb{R}^3, R \in]0, +\infty[, \mathcal{S} = \mathcal{S}(0, R)$ la sphère de centre 0 et de rayon R .

I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow E$ deux fois dérivable.

On suppose que : $\forall t \in I, f(t) \in \mathcal{S}$ (autrement dit, pour tout t , le point $f(t)$ est sur la sphère \mathcal{S}).

1. Montrer que :
 - (i) $\forall t \in I, f'(t) \perp f(t)$ et
 - (ii) $\forall t \in I, \langle f''(t), f(t) \rangle \leq 0$.

2. Interpréter cinématiquement ces résultats.

Solution (Ex.3 – Mouvement sur une sphère et accélération)

1. Soit $N : t \mapsto \|f(t)\|^2 = \langle f(t), f(t) \rangle$. Alors :
 $\forall t \in I, N'(t) = 2 \langle f'(t), f(t) \rangle$, mais comme N est constante égale à R^2 , $N' = 0$.
 Donc : $\forall t \in I, \langle f'(t), f(t) \rangle = 0$ et $f'(t) \perp f(t)$.
 Dérivons alors $P : t \mapsto \langle f'(t), f(t) \rangle$, elle aussi constante.
 $\forall t \in I, P'(t) = \langle f''(t), f(t) \rangle + \langle f'(t), f'(t) \rangle = 0$, donc $\langle f''(t), f(t) \rangle = -\|f'(t)\|^2 \leq 0$.
2. (i) dit qu'en tout point $f(t)$, le vecteur vitesse instantané est orthogonal au rayon $f(t)$... si ça n'était pas le cas, cela compromettrait que le point reste sur \mathcal{S} !
 (ii) dit qu'à tout moment, l'accélération est dirigée vers l'intérieur de la sphère :
 $\cos(\langle f''(t), f(t) \rangle) \leq 0$, i.e. sens opposé au rayon $f(t)$.

Exercice 4 *Dérivation, déterminant et trace*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \det(I_n + tA)$.

Montrer que φ est dérivable et calculer $\varphi'(0)$. On pourra utiliser le polynôme caractéristique de $-A$ ou la multilinéarité du déterminant...

Solution (Ex.4 – Dérivation, déterminant et trace)

En utilisant le polynôme caractéristique de $-A$:

• $\varphi(t)$ est un polynôme en t donc φ est dérivable (et même \mathcal{C}^∞).

• Notons que, pour $t \neq 0$,

$\varphi(t) = \det(t((1/t)I_n - (-A))) = t^n \chi_{-A}(1/t) = 1 - \text{Tr}(-A)t + P(t)$ avec $\deg P \geq 2$.

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{1}{t} (1 + \text{Tr}(A)t + P(t) - \det(I_n)) = \text{Tr}(A) + \frac{P(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \text{Tr}(A) \text{ car}$$

$$\deg(P) \geq 2 \implies \frac{P(t)}{t} \implies \deg\left(\frac{P(t)}{t}\right) \geq 1 \implies \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

En utilisant la multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes

Je note $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$ les colonnes de A et $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de sorte que :

$$\varphi(t) = \det(E_1 + tC_1, E_2 + tC_2, \dots, E_n + tC_n).$$

On a évidemment, $\forall i, \frac{d}{dt}(E_i + tC_i) = C_i$.

En dérivant, par n -linéarité,

$$\varphi'(t) = \det(C_1, E_2 + tC_2, \dots, E_n + tC_n) + \det(E_1 + tC_1, C_2, \dots, E_n + tC_n) + \dots + \det(E_1 + tC_1, E_2 + tC_2, \dots, C_n), \text{ donc}$$

$$\varphi'(0) = \det(C_1, E_2, \dots, E_n) + \det(E_1, C_2, \dots, E_n) + \dots + \det(E_1, E_2, \dots, C_n).$$

Or un développement rapide montre que, $\forall i$,

$$\det(E_1, \dots, E_{i-1}, C_i, E_{i+1}, \dots, E_n) = a_i.$$

D'où $\varphi'(0) = \text{Tr}(A)$.