Exercice 1 *Recherche d'extremums*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + (y^4/4)$.

1. Déterminer les extremums locaux de f.
2. Montrer que les minimums locaux de f sont globaux.

Solution (**Ex.1** – *Recherche d'extremums*)

1. f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
$\nabla f(x, y) = (2x, y^3 - 2y)$ donc f admet trois points critiques : $C_0 = (0, 0)$, $C_1 = (0, \sqrt{2})$ et $C_2 = (0, -\sqrt{2})$.
$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3y^2 - 2 \end{pmatrix}$
$H_f(C_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ donc $H_f(C_0)$ possède une valeur propre strictement positive et une autre strictement négative : C_0 est un point selle où f n'atteint aucun extremum.
$H_f(C_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $H_f(C_1) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et f atteint un minimum local strict en C_1, valant $f(C_1) = -1$.
$H_f(C_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $H_f(C_2) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et f atteint un minimum local strict en C_2, valant $f(C_2) = -1$.
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$f(x, y) - (-1) = x^2 - y^2 + y^4/4 + 1 = x^2 + \dfrac{1}{4}\left(y^2 - 2\right)^2 \geqslant 0$ donc le minimum global de f est -1 et est atteint uniquement en $C_1 = (0, \sqrt{2})$ et $C_2 = -C_1$.

Exercice 2 *Extremums dans* $\mathbb{R}^3$

Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}^3$ des fonctions définies par

1. $f : (x, y, z) \mapsto y^4 + x^2 + 2z^2 - 2xz + 4x - 6z$;
2. $g : (x, y, z) \mapsto 4x^2 - 4xyz + y^2z^2 - 8x - 4y$.

Solution (**Ex.2** – *Extremums dans* $\mathbb{R}^3$)

1. f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$.
$\nabla f(x, y, z) = (2x - 2z + 4, 4y^3, -6 + 4z - 2x)$.
Unique point critique : $c = (-1, 0, 1)$.
$H_f(c) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$: 0 est valeur propre, $\chi_{H_f(c)} = X\chi_{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}(X)$
En notant λ et μ les deux autres valeurs propres, $\lambda\mu = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12$ donc ces deux valeurs propres sont de même signe : on ne peut pas conclure.
$f(x, y, z) - f(c) = f(x, y, z) + 5 = (x - z + 2)^2 + (z - 1)^2 + y^4 \geqslant 0$ donc f atteint un minimum global valant -5 en c.
2. g est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$.
$\nabla g(x, y, z) = (8x - 4yz - 8, -4xz + 2z^2y + 4, -4yx + 2y^2z)$.
g a un unique point critique $c = (1, 0, -1)$ (on pourra partir de $\partial_3 g(x, y, z)$ et distinguer selon que $y = 0$ ou $y \neq 0$.
$H_g(c) = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(H_g(c)) = -128 < 0$ donc 0 n'est pas valeur propre et comme $\operatorname{Tr}(H_g(c)) = 10 > 0$, $H_g(c)$ a nécessairement deux valeurs propres strictement positive et une strictement négative, donc c est un point col de g. Ainsi g n'a aucun extremum local sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 *Recherche d'extremums sur un fermé borné*

Soit f définie par $\quad f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$
sur le domaine $\quad \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$.
Justifier que f est bornée et déterminer le minimum et le maximum de f sur $\mathcal{D}$.

Solution (**Ex.3** – *Recherche d'extremums sur un fermé borné*)

• $\mathcal{D}$ est fermé car défini par les inégalités larges $x^2 - y \leqslant 1$ et $y + x^2 \leqslant 1$ où les membres de gauche sont continues.
$\mathcal{D}$ est borné car clairement $-1 \leqslant y \leqslant 1$, et par conséquent $x^2 \leqslant 1 - y \leqslant 2$ donc $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$. Ainsi $(x, y) \in \mathcal{D} \Rightarrow \|(x, y)\|_\infty \leqslant \sqrt{2}$.
f est polynomiale donc continue sur le fermé borné $\mathcal{D}$ donc est bornée et atteint ses bornes.
f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$.
• Cherchons les points critiques à l'intérieur de $\mathcal{D}$.
$\nabla f(x, y) = (-2xy + 2x, 2y - x^2)$, qui s'annule en $(0, 0)$ et $(\pm\sqrt{2}, 1)$ mais ces deux derniers points ne sont pas dans $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ qui est défini à l'aide d'inégalités strictes.
• Cherchons sur la frontière $\partial\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$.

La frontière est formée des deux portions de parabole $\mathcal{P}_+ = \{(x, 1-x^2) | -1 \leqslant x \leqslant 1\}$ et $\mathcal{P}_- = \{(x, x^2-1) | -1 \leqslant x \leqslant 1\}$
Pour $(x,y) \in \mathcal{P}_+$, $f(x,y) = (1-x^2)^2 - x^2(1-x^2) + x^2 = 2x^4 - 2x^2 + 1$. L'étude de $g : x \mapsto 2x^4 - 2x^2 + 1$ sur $[0\,;\,1]$ (g étant paire) avec $g' : x \mapsto 4x(2x^2-1)$ montre que le maximum de f sur $\mathcal{P}_+$ vaut 1 et le minimum 1/2.
Pour $(x,y) \in \mathcal{P}_-$, $f(x,y) = (x^2-1)^2 - x^2(x^2-1) + x^2 = 1$ donc f est constante égale à 1.
• Bilan : comme $f(0,0) = 0 < 1/2$, le minimum de f sur $\mathcal{D}$ est 0 et son maximum vaut 1.

Exercice 4 *Constance et différentielle nulle*
Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
L'objectif de cet exercice est montrer que f est constante sur U si, et seulement si, sa différentielle est nulle sur U.

1. On suppose que f est constante sur U.
a) Soit $u \in \mathrm{U}$ et $h \in \mathbb{R}^p$. Que vaut la dérivée directionnelle $\mathrm{D}_h(u)$?
b) Conclure.

2. On suppose la différentielle de f nulle sur U, c'est-à-dire :
$$\forall u \in \mathrm{U}, \mathrm{d}f(u) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})}.$$
Soit $(a,b) \in \mathrm{U}^2$. Soit $g : [0\,;\,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto f((1-t)a + tb)$.
a) Montrer que g' est nulle.
b) Conclure.

Solution (**Ex.4** – *Constance et différentielle nulle*)

1. On suppose que f est constante sur U.
a) $\mathrm{D}_h(u) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\big(f(u+h) + f(u)\big) = \lim\limits_{t\to 0} 0 = 0$.
b) On a alors : $\forall u \in \mathrm{U}, \forall h \in \mathbb{R}^p, \mathrm{d}f(u)(h) = \mathrm{D}_h f(u) = 0$, i.e. $\mathrm{d}f(u) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})}$.

2. a) En posant $\gamma : t \mapsto (1-t)a + tb = a + t(b-a)$, on a :
$\forall t \in [0\,;\,1], g'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t)) = 0$ puisque $\mathrm{d}f(\gamma(t)) = 0$.
b) On a alors g constante sur $[0\,;\,1]$, donc $g(0) = g(1)$, i.e. $f(a) = f(b)$.
Comme le raisonnement précédent est vrai pour tout (a,b) de U, f est constante sur U.

Exercice 5 *Recherche d'extremums*
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la fonction
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2y^2 + x^2 + 2xy + ax + bx.$$
Rechercher les éventuels extremums de f dans les cas suivants, en précisant s'ils sont globaux :

1. $a = 0$ et $b = 0$;
2. $a = -2$ et $b = 0$;
3. $a = -2$ et $b = -2$. Pour ce dernier cas, on pourra étudier $f(1+h, -h)$.

Solution (**Ex.5** – *Recherche d'extremums*)
f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$.
Pour tout (x,y),
$\nabla f(x,y) = (2xy^2 + 2x + 2y + a, 2x^2y + 2x + b)$,
$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2+2 & 4xy+2 \\ 4xy+2 & 2x^2 \end{pmatrix}.$$
Dans la suite, on note $d(x,y) = \det(\mathrm{H}_f(x,y))$ et $t(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{H}_f(x,y))$.
On pourra chercher les points critiques par disjonction des cas, selon que x est nul ou non.

1. f admet un unique point critique $c = (0,0)$, $d(0,0) = -4$ donc f n'atteint pas d'extremum en c. f n'a aucun extremum sur $\mathbb{R}^2$.

2. f admet deux points critiques $c_1 = (0,1)$ et $c_2 = (1,-1)$.
• $d(c_1) = -4$ donc c_1 est un point col.
• $d(c_2) = 4$, $t(c_2) = 6$ donc f atteint un minimum local en c_2, valant $f(c_2) = -2$. De plus,
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) - f(c_2) = (xy+1)^2 + (x-1)^2 \geqslant 0$ donc ce minimum est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

3. • $c = (1,0)$ est l'unique point critique de f.
En effet, si $x = 0$ alors $\partial_2 f(x,y) \neq 0$.
Si $x \neq 0$, alors $\partial_2 f(x,y) \Rightarrow y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}$,
et alors $\partial_1 f(x,y) = 0 \Rightarrow x^4 - x^3 - x + 1 = 0$, i.e. $(x-1)^2(x^2+x+1) = 0$, donc $x = 1$, et $y = 0$. On vérifie réciproquement que $\nabla f(1,0) = 0$.
• Malheureusement $d(c) = 0$ donc 0 est valeur propre de $\mathrm{H}_f(c)$ et on ne peux pas conclure à l'aide des propriétés du cours.
• Pour $h \in \mathbb{R}$, $f(1+h,-h) = ... = h^4 + 2h^3 - 1 = h^3(2+h) + f(c)$ donc
$\forall h \in\,]-2\,;\,0[\,, f(1+h,-h) < f(1,0)$ et $\forall h \in\,]0\,;\,2[\,, f(1+h,-h) > f(1,0)$, donc f n'atteint aucun extremum en c.