Exercice 1 *EDL : applications directes du cours*
Résoudre les équations différentielles suivantes, où y désigne une fonction de x suffisamment dérivable sur le domaine indiqué :

1. $y' = (1+y)\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$ **2.** $3xy' - 4y = x, \quad x \in \left]0\,;\,+\infty\right[$

3. $y'' + y = 0, \quad x \in \mathbb{R}$ **4.** $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

6. $y'' + 2y' + y = x\mathrm{e}^x, \quad x \in \mathbb{R}$ (solution part$^{\text{ière}}$ de la forme $f : x \mapsto (ax+b)e^x$)

Solution (**Ex.1** – *EDL : applications directes du cours*)
Je note (E) l'équation différentielle à résoudre, (H) l'équation homogène associée.

1. (H) $\iff y' - (\sin x)y = 0$.
Les solutions de (H) sont : $x \mapsto \mathrm{C}\mathrm{e}^{-\cos x}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ quelconque.
$x \mapsto -1$ est solution particulière évidente de (E).
Les solutions de (E) sont :
$$x \mapsto \mathrm{C}\mathrm{e}^{-\cos x} - 1 \text{ où } \mathrm{C} \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$

2. (H) $\iff y' - \dfrac{4}{3x}y = 0$.
Les solutions de (H) sont : $x \mapsto \mathrm{C}x^{4/3}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ quelconque.
Recherchons une solution particulière par la méthode de la variation de la constante.
Soit $f : x \mapsto \mathrm{C}(x)x^{4/3}$ où $\mathrm{C} : x \mapsto \mathrm{C}(x)$ est dérivable sur $\left]0\,;\,+\infty\right[$.
$(\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[,\quad 3xf'(x) - 4f(x) = x) \iff$
$\left(\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[,\quad 3x\left(\mathrm{C}'(x)x^{4/3} + \mathrm{C}(x)\dfrac{4}{3}x^{1/3}\right) - 4\mathrm{C}(x)x^{4/3} = x\right) \iff$
$\left(\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[,\quad 3x^{7/3}\mathrm{C}'(x) = x\right) \iff$
$\left(\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[,\quad \mathrm{C}'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-4/3}\right) \iff$
$\exists k \in \mathbb{R}, \left(\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[,\quad \mathrm{C}(x) = -x^{-1/3} + k\right)$
Donc $x \mapsto -x$ est solution particulière (évidente ? ? ? ? ? ?... si on avait retiré nos lunettes en contre-plaqué) de (E).
Les solutions de (E) sont :
$$x \mapsto \mathrm{C}x^{4/3} - x \text{ où } \mathrm{C} \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$

3. Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficient constant d'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, de solutions $r = \pm i$.
Les solutions de (E) sont :
$$x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

4. Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficient constant d'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, de solutions 1 et 2.
Les solutions de (E) sont :
$$x \mapsto \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{2x} \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

ques Il s'agit d'une équation différentielle (E) du second ordre à coefficient constant, dont l'équation homogène (H) associée a pour équation caractéristique $r^2+2r+1 = 0$, de solution double -1.
Les solutions de (H) sont :
$$x \mapsto \left(\lambda x + \mu\right)\mathrm{e}^{-x} \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$
On cherche une solution particulière de la forme $f : x \mapsto (ax+b)e^x$.
$\forall x \in \mathbb{R}$,
$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = \mathrm{e}^x\big((a + ax + a + b) + 2(ax + a + b) + ax + b\big)$
$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = \mathrm{e}^x\big(4ax + 4a + 4b\big)$
Alors $a = \dfrac{1}{4}$ et $b = -a$ fournit une solution particulière $x \mapsto \dfrac{x-1}{4}\mathrm{e}^x$.
Les solutions de (E) sont :
$$x \mapsto \left(\lambda x + \mu\right)\mathrm{e}^{-x} + \frac{x-1}{4}\mathrm{e}^x \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

Exercice 2 *Exemples d'EDL2 avec second membre trigonométrique*
Indications pour les deux équations suivantes :
Lorsqu'on cherche une solution particulière d'une équation linéaire du second ordre du type
$$y'' + ay' + by = \alpha\cos(kx) + \beta\sin(kx)$$
on peut chercher une solution du type
$$\lambda\cos(kx) + \mu\sin(kx).$$
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' + 2y = \sin(x)$,

2. $y'' + y = 2\cos^2(x)$.

Solution (**Ex.2** – *Exemples d'EDL2 avec second membre trigonométrique*)

1. L'équation différentielle homogène associée du second ordre à coefficient constant (H) a pour équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$, de solutions $-1 \pm i$.
Les solutions de (H) sont :
$$x \mapsto \left(\lambda\cos x + \mu\sin x\right)\mathrm{e}^{-x} \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$
On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme $x \mapsto a\sin x + b\cos x$. Après substitution $a = \dfrac{1}{5}$ et $b = \dfrac{-2}{5}$.
Les solutions de cette équation différentielle sont finalement :
$$x \mapsto \left(\lambda\cos x + \mu\sin x\right)\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{2}{5}\cos(x) \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

2. On procède de façon analogue.
Les solutions de l'équation homogène associée sont :

$$x \mapsto \lambda\cos x + \mu \sin x \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

Pour trouver une solution particulière de $y''+y = 2\cos^2(x)$, on observe que $2\cos^2(x) = \cos(2x)+1$ et on s'intéresse alors aux équations d'inconnues $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(\mathrm{E}_1) \quad z''+z = \cos(2x) \text{ et } (\mathrm{E}_2) \quad w''+w = 1.$$

Si z est solution de E_1 et w de (E_2), par superposition $y+w$ sera solution de l'équation initiale.

Tout calcul fait, $y : x \mapsto -\dfrac{1}{3}\cos(2x)$ convient et $w : x \mapsto 1$ est solution évidente.

Les solutions de l'équation avec second membre sont :

$$x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x + 1 - \frac{1}{3}\cos(2x) \text{ où } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

Exercice 3 *Exemple de variation des constantes*

1. Quelles sont les solutions de : $\quad y''+y=0$
   où $y :]-\pi/2\,;\ \pi/2[\to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable ?
2. On considère l'équation différentielle
   $$(\mathrm{E}) : \qquad y''+y = \frac{1}{\cos x}$$
   où $y :]-\pi/2\,;\ \pi/2[\to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable.
   Résoudre (E) en cherchant une solution de la forme $x \mapsto \mathrm{A}(x)\cos x + \mathrm{B}(x)\sin x$ où A et B sont deux fois dérivables et vérifient $\mathrm{A}'(x)\cos x + \mathrm{B}'(x)\sin x = 0$.

Solution (**Ex.3** – *Exemple de variation des constantes*)

1. $\mathcal{S}_{\mathrm{H}} = \mathrm{Vect}(\cos,\sin) = \{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) / (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$
   Voir exercice *Applications directes du cours.*
2. On considère l'équation différentielle
   $$(\mathrm{E}) : \qquad y''+y = \frac{1}{\cos x}$$
   où $y :]-\pi/2\,;\ \pi/2[\to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable.
   a) *Analyse –*
   Soit A et B deux fonctions deux fois dérivables sur $]-\pi/2\,;\ \pi/2[$ vérifiant
   $$\forall x \in]-\pi/2\,;\ \pi/2[, \quad \mathrm{A}'(x)\cos x + \mathrm{B}'(x)\sin x = 0.$$
   On suppose que $y : x \mapsto \mathrm{A}(x)\cos x + \mathrm{B}(x)\sin x$ vérifie (E).
   $\forall x \in]-\pi/2\,;\ \pi/2[$,
   $y(x) = \mathrm{A}(x)\cos x + \mathrm{B}(x)\sin x$
   $y'(x) = \mathrm{A}'(x)\cos x + \mathrm{B}'(x)\sin x - \mathrm{A}(x)\sin x + \mathrm{B}(x)\cos x = -\mathrm{A}(x)\sin x + \mathrm{B}(x)\cos x$
   par les hypothèses sur A et B.
   $y''(x) = -\mathrm{A}'(x)\sin x - \mathrm{A}(x)\cos x + \mathrm{B}'(x)\cos x - \mathrm{B}(x)\sin x$
   $y''(x)+y(x) = \dfrac{1}{\cos x} \Longrightarrow -\mathrm{A}'(x)\sin x + \mathrm{B}'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}$
   Finalement, pour tout $x \in]-\pi/2\,;\ \pi/2[$, $\mathrm{A}'(x)$ et $\mathrm{B}'(x)$ sont solutions de
   $$\begin{cases} -\mathrm{A}'(x)\sin x + \mathrm{B}'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \\ \mathrm{A}'(x)\cos x + \mathrm{B}'(x)\sin x = 0 \end{cases}$$
   donc $\mathrm{A}'(x) = -\tan x$ et $\mathrm{B}'(x) = 1$, et il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{A} : x \mapsto \ln(\cos x)+\lambda$ et $\mathrm{B} : x \mapsto x+\mu$.
   Synthèse –
   Soit $y : x \mapsto \ln(\cos x)\cos x + x\sin x$. Alors :
   $y' : x \mapsto -\sin x - \ln(\cos x)\sin x + \sin x + x\cos x = -\ln(\cos x)\sin x + x\cos x$
   $y'' : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} - \ln(\cos x)\cos x + \cos x - x\sin x.$
   Et : $\forall x \in]-\pi/2\,;\ \pi/2[$,
   $y''(x)+y(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x}.$
   y est une solution particulière de (E).
   L'ensemble des solutions de (E) est donc :
   $$\left\{x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x + \ln(\cos x)\cos x + x\sin x / (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 4 *Étude d'un système différentiel*

On souhaite déterminer toutes les fonctions $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

On pose $\mathrm{X} : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $(\mathcal{S}) \iff \mathrm{X}' = \mathrm{MX}$.
2. Déterminer P telle que $\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{MP}$ soit une matrice diagonale, notée D.
3. On pose $\mathrm{Y} = \mathrm{PX}$. Montrer que $(\mathcal{S}) \iff \mathrm{Y}' = \mathrm{DY}$.
4. Résoudre $(\mathcal{S})$

Solution (**Ex.4** – *Étude d'un système différentiel*)

$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{P} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} \alpha\exp(3t) \\ \beta\exp(-t) \end{pmatrix}$,

$\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\exp(3t) + b\exp(-t) \\ a\exp(3t) - b\exp(-t) \end{pmatrix}$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 1 *Approximations du nombre d'or*

1. Soit $\mathrm{I} = \left[\frac{3}{2}\,;\ 2\right]$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$.
Justifier à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires et/ou de son cousin le théorème de bijection strictement monotone que l'équation
$$f(x) = x$$
possède une unique solution dans I.
On note ϕ cette solution, souvent appelé « nombre d'or ».
2. Vérifier que ϕ est l'unique racine positive de l'équation
$$x^2 = x + 1.$$
et calculer ϕ.
3. Justifier que I est stable par f.
4. On définit la suite u par
$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$
Justifier que si u converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \phi$.
5. Justifier que
$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{4}{9}\,|x-y|\,.$$
6. En déduire
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \phi| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}.$$
7. Qu'en déduire ?
8. Soit $\mathrm{J} = [\,\phi\,;\ 2]$ et $g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$.
Montrer que J est stable par g.
9. Justifier que
$$\forall x \in \mathrm{J}, \quad |g(x) - \phi| \leqslant \frac{1}{2}(x-\phi)^2.$$
10. On définit la suite v par
$$v_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = g(v_n).$$
11. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - \phi| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}.$$
12. Qu'en déduire ?
13. Comparer la vitesse de convergence de ces deux suites.

Solution (**Ex.1** – *Approximations du nombre d'or*)

1. $x \mapsto f(x) - x$ est continue et change de signe sur I, en étant strictement decroissante.
2. $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
3. Par décroissance de f, $f(\mathrm{I}) = [\,f(2)\,;\ f(3/2)] \subset \mathrm{I}$.
4. $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ (suite extraite), $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$ (continuité), donc $\ell = f(\ell)$ (unicité) et $\ell \in \mathrm{I}$ (I fermé), donc $\ell = \phi$.
5. IAF en observant que $|f'| \leqslant 4/9$ sur I.
6. Par récurrence avec $x = \phi$ et $y = u_n$ dans l'inégalité précédente.
7. Par encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi$.
8. g est croissante avec $g(\phi) = \phi$ et $g(2) = 5/3 < 2$.
9. Inégalité de Taylor-Lagrange appliquée en ϕ à l'ordre 1 :
$g(\phi) = \phi$, $g'(\phi) = 0$, $|g''(x)| = \frac{10}{(2x-1)^3} \leqslant \frac{10}{(2\phi-1)^3} \leqslant \frac{10}{\sqrt{5}^3} \leqslant \frac{2}{\sqrt{5}} \leqslant 1$
donc : $\forall x \in \mathrm{J}, \quad |g(x) - \phi| \leqslant \frac{1}{2}(x-\phi)^2$.
10. Par récurrence sur n.
11. $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi$.
12. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = o\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\right)$ donc la suite v converge infiniment plus vite vers ϕ que la suite u.

Exercice 2 *Autour des différentes formules Taylor*

Soit n un entier naturel et I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On considère une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

1. Démontrer par récurrence sur n la formule de Taylor avec reste intégral
$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2, \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

2. En déduire l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2, \quad \left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \left|\left| f^{(n+1)} \right|\right|_\infty$$

On ne traitera que le cas $a \leqslant b$.

3. Soit $[\, a\,;\; b\,] \subset \mathrm{I}$.

a) Montrer que

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(a+s(b-a))\mathrm{d}s$$

b) Justifier à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $c \in [\, a\,;\; b\,]$ tel que

$$f^{(n+1)}(c) = (n+1) \int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(a+s(b-a))\mathrm{d}s.$$

c) En déduire le théorème de Taylor

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2, \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

4. On suppose que $a \in \mathrm{I}$. Établir la formule de Taylor-Young

$$f(b) \underset{b\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + o\left((b-a)^n\right)$$

Solution (**Ex.2** – *Autour des différentes formules Taylor*)

1. Pour l'hérédité, il suffit d'intégrer par parties :
$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$$

2. On majore par l'inégalité triangulaire, puis on majore $\left|f^{(n+1)}(t)\right|$ par $\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_\infty$. Enfin on intègre $t \mapsto (b-t)^n$...

3. a) En posant $t = a + s(b-a)$ soit encore $s = \dfrac{t-a}{b-a}$ (changement affine donc $\mathcal{C}^1$),
$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(a+s(b-a))\mathrm{d}s$$

b) f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[\, a\,;\; b\,]$ donc $f^{(n+1)}$ est bornée et atteint ses bornes.
Soit $m = \min\limits_{[\, a\,;\; b\,]} f$ et $\mathrm{M} = \max\limits_{[\, a\,;\; b\,]} f$.
Par croissance de l'intégrale,
$$m \int_0^1 (1-s)^n \mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(a+s(b-a))\mathrm{d}s \leqslant \mathrm{M} \int_0^1 (1-s)^n \mathrm{d}s$$
donc en calculant l'intégrale
$$m \leqslant (n+1) \int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(a+s(b-a))\mathrm{d}s \leqslant \mathrm{M}.$$
En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires,
$$\exists c \in [\, a\,;\; b\,],\, f^{(n+1)}(c) = (n+1) \int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(a+s(b-a))\mathrm{d}s$$

c) Le reste intégral peut alors s'écrire $\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

4. Il suffit d'observer que $k(b-a)^{n+1} \underset{b\to a}{=} o\left((b-a)^n\right)$... pour n'importe quelle constante, par exemple $k = \dfrac{\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_\infty}{(n+1)!}$

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ *Deux applications des accroissements finis et du théorème de Rolle*

1. *Formule de la moyenne*

Soit $g : [\, \alpha\,;\; \beta\,] \to \mathbb{R}$ continue et $\mathrm{M}_{\alpha,\beta} = \dfrac{1}{\beta - \alpha} \displaystyle\int_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t$ la valeur moyenne de g sur $[\, \alpha\,;\; \beta\,]$.
Montrer qu'il existe $\gamma \in \,]\, \alpha\,;\; \beta\,[$ tel que $\mathrm{M}_{\alpha,\beta} = g(\gamma)$.

2. *Une généralisation du théorème de Rolle*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f possède une même limite ℓ en $-\infty$ et $+\infty$.

a) Faire un dessin.

b) En considérant le prolongement par continuité de $g = f \circ \tan$ sur $[\, -\pi/2\,;\; \pi/2\,]$, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Solution (**Ex.3** – *Deux applications des accroissements finis et du théorème de Rolle*)

1. Soit G une primitive de g. G est de classe $\mathcal{C}^1$ donc par le théorème des accroissements finis, $\exists \gamma \in \,]\, \alpha\,;\; \beta\,[$ tel que $\mathrm{G}'(c) = \dfrac{\mathrm{G}(\beta) - \mathrm{G}(\alpha)}{\beta - \alpha}$ i.e. $g(\gamma) = \mathrm{M}_{\alpha,\beta}$.

2. Par composition, g est dérivable sur $]\, -\pi/2\,;\; \pi/2\,[$. On prolonge g par continuité sur $[\, -\pi/2\,;\; \pi/2\,]$ en posant $g(-\pi/2) = g(\pi/2) = \ell$. Donc g est continue sur $[\, -\pi/2\,;\; \pi/2\,]$. Comme $g(-\pi/2) = g(\pi/2)$, le théorème de Rolle assure : $\exists \gamma \in \,]\, -\pi/2\,;\; \pi/2\,[$ tel que $g'(\gamma) = 0$.
Or $g'(\gamma) = f'(\tan(\gamma))\tan'(\gamma) = f'(\tan(\gamma))\big(1 + \tan^2(\gamma)\big)$, et comme $1 + \tan^2(\gamma) \neq 0$, $f'(\tan(\gamma)) = 0$, i.e. $f'(c) = 0$ en prenant $c = \tan(\gamma)$.

Largement inspiré de ESSEC ECS 2010 et E3A maths 2 PSI 2018

Le but de cette partie de problème est d'étudier certaine propriété des solutions de l'équation différentielle scalaire à coefficient constant d'ordre 1 dont le second membre est borné.

Dans tout le problème, I est l'intervalle $[1\,;\ +\infty[$.

On note $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles, et $\mathcal{E}_1 = \mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de fonctions de classe C^1 sur I à valeurs réelles.

Lorsque V est un endomorphisme de $\mathcal{E}$, on rappelle que $\mathrm{V}^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ et que si n est un entier naturel non nul, $\mathrm{V}^n = \underbrace{\mathrm{V} \circ \cdots \circ \mathrm{V}}_{n}$.

Soit a un **réel strictement positif**.

Pour tout f de $\mathcal{E}$, on considère l'équation différentielle sur I :

$$y' - ay + f = 0 \qquad (\mathrm{E}_a^f)$$

et on note $\mathcal{S}_a^f$ l'ensemble de ses solutions sur I.

1. Étude de l'équation (E_a^f).

1..1. Soient $f \in \mathcal{E}$ et $z \in \mathcal{E}_1$.
Montrer que z est solution de (E_a^f) si et seulement s'il existe $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad z(x) = e^{ax}\left(\mathrm{K} - \int_1^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t\right)$$

1..2. Prouver que s'il existe une solution de (E_a^f) qui soit bornée sur I, alors celle-ci est unique.

1..3. Vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

1..4. Démontrer que la fonction $\mathrm{F} : x \in \mathrm{I} \mapsto e^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique solution de (E_a^f) bornée sur I.

On définit ainsi une application U_a de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à toute fonction f de $\mathcal{E}$ associe la fonction $\mathrm{F} = \mathrm{U}_a(f)$ ainsi obtenue.

2. Étude de quelques propriétés de U_a.

2..1. Expliciter $\mathrm{U}_a(f)$ lorsque f est la fonction constante égale à 1.

2..2. Vérifier que U_a est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

2..3. **a.** L'endomorphisme U_a est-il injectif ?

b. Montrer que pour tout f élément de $\mathcal{E}$, $\mathrm{U}_a(f) \in \mathcal{E}_1$.

c. L'endomorphisme U_a est-il surjectif ?

2..4. **On suppose uniquement dans cette question que** $a = 1$.
Montrer que le sous-espace de $\mathcal{E}$: $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ est stable par U_1. En donner une base $\mathcal{B}$.

Écrire la matrice M de la restriction de U_1 à $\mathcal{F}$ dans cette base.

Prouver que $\mathrm{M} = \lambda\Omega$ où λ est un réel positif et Ω une matrice de rotation dont on déterminera l'angle.

3. **On revient au cas général.**

3..1. Pour $r \in [0\,;\ +\infty[$, on note f_r la fonction de $\mathcal{E}$ définie par : $x \mapsto e^{-rx}$.
Déterminer $\mathrm{U}_a(f_r)$.

3..2. Soit $\lambda \in \left]0; \dfrac{1}{a}\right]$. Le réel λ est-il valeur propre de l'endomorphisme U_a ?

3..3. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(\mathrm{U}_a^n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ sur I.

3..4. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{U}_a^n(f_r)$ sur I et déterminer sa somme lorsqu'elle converge.

4. Prouver que l'on a, pour tout élément f de $\mathcal{E}$:

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{U}_a(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t)\mathrm{d}t$$

5. Pour tout entier naturel k, on note g_k la fonction de $\mathcal{E}$ définie par : $g_k(x) = e^{-x}x^k$ et on note $\mathrm{G}_k = \mathrm{U}_a(g_k)$.
Pour tout entier naturel p, on note $\mathcal{F}_p = \mathrm{Vect}(g_0, \ldots, g_p)$.

5..1. Donner une base $\mathcal{B}_p$ de $\mathcal{F}_p$.

5..2. Vérifier que $\mathcal{F}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ stable par U_a.

5..3. Calculer le déterminant de la restriction de U_a à $\mathcal{F}_p$.

6. Prouver que l'on a : $\forall\, f \in \mathcal{E}$, $|\mathrm{U}_a(f)| \leqslant \mathrm{U}_a(|f|)$.

7. Soit f dans $\mathcal{E}$ à valeurs positives. En est-il de même pour $\mathrm{U}_a(f)$?

8. Soit f dans $\mathcal{E}$ décroissante. Prouver que $a\mathrm{U}_a(f) \leqslant f$ puis que $\mathrm{U}_a(f)$ est décroissante.

9. On note :

- $\mathcal{H}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ de classe C^1 sur I et tels que f' est bornée sur I.
- D l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{H}$.

Soit $f \in \mathcal{H}$.

9..1. Montrer que l'on a : $\mathrm{U}_a(f') - a\mathrm{U}_a(f) + f = 0$.

9..2. En déduire que U_a et D commutent dans $\mathcal{H}$.

10. Soit $f \in \mathcal{E}$. Vérifier que pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_a^{n+1}(f)$ est la fonction

$$x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t.$$

On pourra procéder par intégration par parties.

11. Soit $f \in \mathcal{E}$.
On suppose dans cette question et uniquement dans cette question que $a > 1$.

11..1. Soient $x \in \mathrm{I}$ et t un réel supérieur ou égal à x. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) \right)$.

11..2. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{U}_a(f)$ est simplement convergente sur I. On notera S sa somme.
On pourra utiliser sans démonstration le résultat valable pour tout entier naturel n :

$$\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\mathrm{d}u = n!$$

11..3. Démontrer qu'il existe un réel $b > 0$ tel que $\mathrm{S} = \mathrm{U}_b(f)$.

Largement inspiré de E3A maths 2 PSI 2016

Le but de cette partie de problème est de calculer la valeur de la série de Riemann de paramètre 2

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

en exploitant les racines d'une famille de polynômes [1].

Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Déterminer, s'ils existent, module et argument du nombre complexe $u = 1 + e^{i\theta}$.

2. On note P_n le polynôme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ défini par

$$\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = \frac{1}{2i}\left((\mathrm{X}+i)^{2n+1} - (\mathrm{X}-i)^{2n+1}\right)$$

(a) Etude des cas $n = 1$ et $n = 2$

i. Déterminer les polynômes P_1 et P_2.

ii. Vérifier que $\mathrm{P}_1 \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et que $\mathrm{P}_2 \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$. Sont-il irréductibles dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$?

(b) Cas général

i. Montrer que $\mathrm{P}_n \in \mathbb{C}_{2n}[\mathrm{X}]$. Donner son degré et son coefficient dominant.

ii. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression des racines N-ièmes de l'unité.

iii. Calculer $\mathrm{P}_n(i)$.

iv. Prouver par un argument géométrique que les racines de P_n sont réelles.

v. Soit $a \in \mathbb{C}$. prouver l'équivalence

$$a \text{ est racine de } \mathrm{P}_n \iff \exists k \in [|1, 2n|],\ a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$$

vi. Déterminer les racines du polynôme P_n. Vérifier alors le résultat de 2.b.iv.

vii. En développant P_n, déterminer un polynôme Q_n de degré n et à coefficients réels tel que

$$\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = \mathrm{Q}_n(\mathrm{X}^2)$$

viii. Justifier l'unicité du polynôme Q_n ainsi obtenu.

ix. Expliciter Q_1 et Q_2 et déterminer leurs racines respectives.

x. Déterminer les racines de Q_n en fonction de celles de P_n.

3. On pose $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$. En utilisant des résultats obtenus à la question précédente, montrer que $\mathrm{S}_n = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.

4. (a) Illustrer graphiquement les inégalités suivantes, puis les démontrer

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

(b) En déduire que

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

5. Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ et calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

1. Cette preuve a été publiée en mars 1973 par Ioannis Papadimitriou, mathématicien amateur (voir https ://www.maa.org/sites/default/files/pdf/pubs/amm_supplements/Monthly_Reference_8.pdf)

Largement inspiré de E3A maths 2 PC 2016

Le but de ce problème est de donner, dans la partie I, trois expressions différentes du réel $\ln(2)$ sous la forme d'une somme de série puis d'étudier, dans la partie II, la vitesse de convergence de ces trois séries.

On rappelle que pour une série $\sum_{k\geqslant 1} u_k$, le reste d'indice n, pour $n \in \mathbb{N}$ est le réel défini par $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Partie I

1. Rappeler, en précisant le rayon de convergence, le développement en série entière de la fonction définie sur $]-1\,;\ +\infty[$ par $x \mapsto \ln(1+x)$.

2. Montrer alors que $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.

3. (a) Donner le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{k\geqslant 1} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$.

(b) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.

4. (a) Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;\ 1]$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right| \leq \frac{1}{n+1}$.

(c) En déduire que $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

Partie II

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}, \quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{et} \quad \mathrm{V}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$$

R_n, S_n et V_n sont donc les restes d'ordre n des séries vues en première.

Le but de cette partie est de déterminer des équivalents des trois suites (R_n), (S_n) et (V_n).

On rappelle que la notation $u_n \sim v_n$ signifie que la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) et $u_n = o(v_n)$ signifie que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n).

1. On note dans cette question $(\mathrm{U}_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $\mathrm{U}_n = \displaystyle\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$.

(a) Calculer U_n. Écrire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2^k}$ en fonction de deux termes de la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\geq 0}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathrm{R}_n = \dfrac{\mathrm{U}_n}{n+1} - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{U}_k}{k(k+1)}$.

(c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{U}_k}{k(k+1)} = o(\mathrm{R}_n)$.

(d) Conclure que $\mathrm{R}_n \sim \dfrac{1}{n2^n}$.

2. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [\,0\,;\ 1\,]\,, \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \mathrm{S}_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.

(c) Montrer que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{S}_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\, dt.$$

(d) Conclure que $\mathrm{S}_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$.

3. Montrer que $\mathrm{V}_n \sim \dfrac{1}{n^2 2^n}$.

4. Parmi les trois séries étudiées dans ce problème, laquelle converge le plus rapidement ? Laquelle converge le moins rapidement ? Justifiez vos réponses.

Exercice 1 *Succession d'expériences non indépendantes*

Contexte

Le classique schéma de Bernoulli étudié en cours suppose l'indépendance des expériences réalisées. Que dire lorsque chaque expérience dépend du succès de la précédente, par exemple lors de la transmission d'un message basique 0-1 par n intermédiaires dont la fiabilité n'est pas garantie ?

On considère une succession d'expériences aléatoires pouvant chacune se solder pour un succès ou un échec. On suppose que :

① si la n-ème expérience donne un succès, alors la suivante donne un succès avec une probabilité $p \in]0\,;\ 1[$;

② si la n-ème expérience donne un échec, alors la suivante donne un succès avec une probabilité $q \in]0\,;\ 1[$.

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

① X_n la variable indicatrice de l'événement *« la n-ième expérience donne un succès »* ;

② U_n le vecteur de $\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ défini par

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) & \mathbb{P}([X_n = 0]) \end{pmatrix}.$$

1. a) Montrer **RIGOUREUSEMENT** qu'il existe une matrice S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = U_n S.$$

La matrice S est parfois appelée 'matrice de transition' de ce processus.

b) En déduire une expression de U_n en fonction de S, n et U_1.

c) Vérifier que S admet 1 pour valeur propre puis qu'elle est diagonalisable.

d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X_n = 1])$.

On dit parfois que la suite (X_n) *converge en loi vers* $\mathcal{B}()$. *On notera que cette limite ne dépend pas de l'issue de la première expérience.*

2. *On se propose de retrouver la limite précédente par une autre méthode.*

a) Montrer que la suite $\big(\mathbb{P}([X_n = 1])\big)$ est arithmético-géométrique.

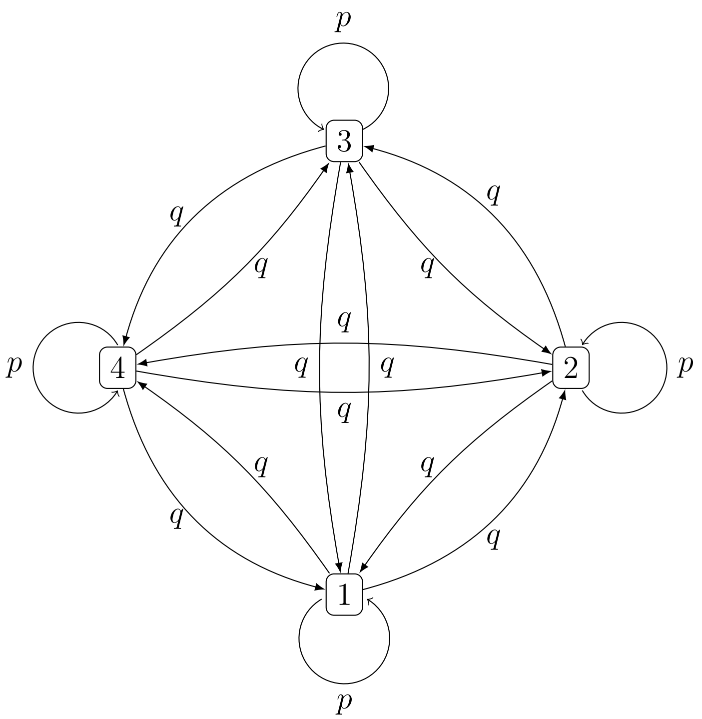
b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X_n = 1])$.

Exercice 2 *Exemple de chaîne de Markov à 4 états*

Contexte

Une chaîne de Markov décrit un système pouvant au cours du temps être dans différents états, chaque nouvel état dépendant de l'état précédent du système. Andreï Markov a publié les premiers résultats sur les chaînes de Markov à espace d'états fini en 1906. Une généralisation à un espace d'états infini dénombrable a été publiée par Kolmogorov en 1936.

On considère quatre points dans le plan numérotés de 1 à 4. Une particule se déplace chaque seconde sur l'ensemble de ces points de la façon suivante : si elle se trouve au point i, elle y reste avec une probabilité égale à 1/10 ou passe en un point $j \neq i$ de façon équiprobable.



Exemple de chaîne de Markov à 4 états

On note X_0 une variable aléatoire de loi P_0 donnant la position X_0 en l'instant $n = 0$, X_n la position du point à l'instant n et $P_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = 4) \end{pmatrix}$ la loi de X_n.

1. Montrer **RIGOUREUSEMENT** qu'il existe une matrice Q, que l'on déterminera, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n = Q^n P_0.$$

La matrice Q s'appelle « matrice de transition » de cette chaîne de Markov.

2. a) Justifier que Q est diagonalisable.
b) Déterminer **RAPIDEMENT** les valeurs propres et sous-espaces propres de Q.
c) Montrer que la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note L sa limite.

3. a) Justifier l'existence d'une matrice orthogonale $U \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ telle que ${}^tUQU$ soit diagonale.
b) En déduire que L est la matrice du projecteur orthogonal de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ sur Vect(V) où V désigne le vecteur de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
c) Déterminer finalement la limite de P_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Sa limite dépend-elle de la position initiale de la particule ?
d) Quelle est la loi limite de la suite de variables (X_n) ?

Exercice 3 *Généralité sur les matrices stochastiques*

CONTEXTE

Les matrices de transition des deux exemples précédents possèdent deux propriétés caractéristiques : coefficients entre 0 et 1 et sommes des coefficients sur chaque ligne toutes égales à 1. Ce sont des matrices « stochastiques » (qui est un synonyme grec d'aléatoire), et il est intéressant de pourvoi calculer leurs puissances successives.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *stochastique* si

① $\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2, \qquad m_{i,j} \geqslant 0,$

② $\forall i \in [\![1\,;\, n]\!], \qquad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1.$

On dit de plus que M est *strictement stochastique* si, dans ①, toutes les inégalités sont strictes. Soit U le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1

1. a) Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que M est stochastique (respectivement strictement stochastique) si, et seulement si, $\mathrm{MU} = \mathrm{U}$ et tous les coefficients de M sont positifs (respectivement strictement positifs).

b) En déduire que le produit de deux matrices stochastiques (respectivement strictement stochastiques) est une matrice stochastique (respectivement strictement stochastique).

c) Si M est stochastique (respectivement strictement stochastique) et si la suite (M^n) converge, que peut-on dire de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{M}^n$?

2. Soit M une matrice stochastique et λ une valeur propre de M.
Soit $\mathrm{V} = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ.
On note $k \in [\![1\,;\, n]\!]$ un indice tel que $v_k = \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n} \big(|v_i|\big)$.

a) Justifier que $|\lambda|\,|v_k| \leqslant |v_k|$.

b) Que peut-on en déduire pour λ ?

c) Montrer que $|\lambda - m_{k,k}| \leqslant 1 - m_{k,k}$.

On suppose de plus, jusque la fin de cette question, que M est strictement stochastique.

d) Montrer que, si $\lambda \neq 1$, alors $|\lambda| < 1$.

e) Soit X un vecteur propre réel de M associé à 1 et x_k son coefficient de plus grande valeur absolue. Quitte à remplacer X par $-\mathrm{X}$, on suppose $x_k > 0$.
Justifier que $x_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{k,j} x_j$ et en déduire que X est proportionnel à U.

3. Montrer que si M est strictement stochastique et diagonalisable, alors la suite $(\mathrm{M}^m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projecteur de rang 1.

$\boxed{\text{Bilan}}$

Si M est stochastique, alors :

① 1 est valeur propre de M et $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à 1,

② toute valeur propre de M est de module au plus égal à 1 : $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) \subset \big\{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leqslant 1 \big\}$

Si de plus M est strictement stochastique, alors

❸ 1 est l'unique valeur propre de M de module 1,

❹ ses autres valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1,

❺ le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1 : $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$.

❻ si M est diagonalisable, alors la suite (M^n) converge vers une matrice de projecteur de rang 1.

4. Soit $\mathrm{M} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Vérifier que M est strictement stochastique non diagonalisable. *Pour la non-diagonalisabilité, il n'est pas nécessaire de déterminer* χ_{M}*...*

Exercice 4 *Les matrices* J_n

Contexte

Lorsque le système a une probabilité p de rester dans le même état et une équiprobabilité de passer dans l'un des autres états (comme dans l'exercice 2), la matrice de transition a une forme particulière dont les éléments propres peuvent être déduits de l'étude d'une matrice fréquemment rencontrée en algèbre, la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la matrice $\mathrm{J}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. a) Justifier que J_n est diagonalisable.

b) Calculer J_n^2 et en déduire les valeurs propres possibles de J_n.

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de J_n.

2. a) Montrer qu'il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \mathrm{J}_n$ soit la matrice canoniquement associée à une projection p de $\mathbb{R}^n$ distincte de l'endomorphisme nul.

b) Justifier que cette projection p est une projection orthogonale.

3. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$\mathrm{M}(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix} = (\alpha - \beta)\mathrm{I}_n + \beta \mathrm{J}_n$$

a) Justifier que $\mathrm{F} = \left\{\mathrm{M}(\alpha,\beta) | (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'il est stable par le produit matriciel.

b) Justifier que toute matrice de F est diagonalisable et préciser ses éléments propres.

4. On suppose $n \geq 3$.

Soit S une matrice stochastique de F distincte de I_n (comme la matrice Q de l'exercice 2).

a) Montrer que la suite $(\mathrm{S}^m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge.

b) Soit V une colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et U la colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Caractériser à l'aide d'un produit scalaire la propriété $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$.

c) Soit V une colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!], \qquad v_i \in [\,0\,;\, 1] \text{ et } \sum_{i=1}^{n} v_i = 1.$$

Justifier que, pour tout m de $\mathbb{N}$, la somme des coefficients de $\mathrm{S}^m\mathrm{V}$ vaut 1.

d) Que vaut $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \mathrm{S}^m\mathrm{V}$? Commenter ce résultat en terme de chaîne de Markov.

EDL1, intégrale à paramètre et algèbre linéaire

1.1) . Les solutions de l'équation homogène $y' - ay = 0$ forment l'ensemble $\mathrm{Vect}(x \mapsto e^{ax})$

.. Soit $y : I \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{ax}\int_1^x e^{-at} f(t)dt$. Alors : $\forall x \in I$,

$y'(x) - ay(x) + f(x) = -ay'(x) - e^{ax}e^{-ax}f(x) + ay(x) + f(x) = 0$

Donc y est une solution de (E_a^f).

∴ Par le principe de superposition, z est solution de (E_a^f) ssi : $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, z(x) = e^{ax}(K - \int_1^x e^{-at} f(t)dt)$

1.2) Soit z_1 et z_2 deux solutions bornées de (E_a^f). Alors :

(i) $z_1 - z_2$ est bornée

(ii) $\forall x \in I$, $z_1(x) - z_2(x) = e^{ax}(K_1 - K_2)$.

Comme $a > 0$, si $K_1 \neq K_2$, alors $z_1(x) - z_2(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ donc $z_1 - z_2$ n'est pas bornée, ce qui est impossible. Donc $K_1 = K_2$ ce qui prouve l'unicité d'une éventuelle solution bornée de (E_a^f).

1.3) $f \in \mathcal{E}$ donc f est bornée sur I. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f| \leq M$. On a alors :

$$\forall t \in I, \ |e^{-at} f(t)dt| \leq M.e^{-at}$$

Or d'après le cours $\int_1^{+\infty} e^{-at} dt$ converge car $a > 0$.

Donc par comparaison de fonction positive, $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)dt$ converge (absolument).

1.b) . $F : I \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)dt$ est solution de (E_a^f) car elle correspond au choix $K = \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)dt$ dans 1.1.

.. Toujours avec M tel que $|f| \leq M$ sur I, on a :

$\forall x \in I, |F(x)| \leq M e^{ax}\left[-\frac{e^{-at}}{a}\right]_x^{+\infty} \leq M e^{ax}\frac{e^{-ax}}{a} \leq \frac{M}{a}$

donc F est bornée, c'est donc l'unique solution bornée de (E_a^f).

2.1) En explicitant F de 1.b) pour $f = 1$ ou de façon évidente $U_a(1) : x \mapsto \frac{1}{a}$.

2.2) . Si $f \in \mathcal{E}$, $U_a(f)$ est une fonction continue et bornée donc $U_a(f) \in \mathcal{E}$.

.. Comme $U_a : f \mapsto (x \mapsto e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)dt)$, U_a est linéaire par linéarité de l'intégrale.

Donc U_a est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

2.3a) Si $U_a(f) = 0_{\mathcal{E}}$, comme $U_a(f)' - aU_a(f) + f = 0$, on a $f = 0_{\mathcal{E}}$. Ceci prouve que $\mathrm{Ker}(U_a) = \{0\}$

Donc U_a est injectif.

2.3b) Soit $f \in \mathcal{E}$. $U_a(f)$ est solution de (E_a^f) donc est dérivable avec $U_a(f)' = aU_a(f) - f$ continue.

Donc $U_a(f) \in \mathcal{E}_1$.

2.3.c) $g : x \mapsto |x-2| \in \mathcal{E}$ mais n'est pas dérivable en 2 donc $g \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1$. Du coup, g n'a pas d'antécédent par U_a car si $g = U_a(f)$ alors $g \in \mathcal{E}_1$ d'après 2.3.b).
Donc U_a n'est pas surjectif

Remarque : en dimension infinie, un endomorphisme peut être injectif et non-surjectif, ce qui est impossible en dimension finie.

2.4) • Par linéarité de U_1, il suffit de montrer que $U_1(\sin) \in \mathcal{F}$ et $U_1(\cos) \in \mathcal{F}$.
On peut calculer ces deux images séparément, ou bien : $\forall x \in I$,

$$U_1(\cos)(x) + i\,U_1(\sin)(x) = e^{x}\int_x^{+\infty} e^{-t} e^{it}\,dt$$
$$= e^{x}\int_x^{+\infty} e^{(i-1)t}\,dt = e^{x}\left[\frac{e^{(i-1)t}}{i-1}\right]_x^{+\infty} = e^{x}\,\frac{e^{(i-1)x}}{1-i}$$
$$= \frac{e^{ix}}{1-i} = \frac{1}{2}e^{ix}(1+i)$$

et par unicité des parties réelles et imaginaires,

$U_1(\cos)(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) - \sin(x))$

$U_1(\sin)(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))$

Donc $U_1(\cos) = \frac{1}{2}(\cos - \sin)$ et $U_1(\sin) = \frac{1}{2}(\cos + \sin)$.

Ainsi $U_1(\cos) \in \mathcal{F}$ et $U_1(\sin) \in \mathcal{F}$.

Donc $\mathcal{F}$ est stable par U_1.

$(\sin, \cos)$ est libre (fonctions non proportionnelles) et génératrice de $\mathcal{F}$ donc
$(\sin, \cos)$ est une base de $\mathcal{F}$.

• • $$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$$

donc $M = \lambda\Omega$ où $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et Ω est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Remarque : • En prenant la base $(\cos, \sin)$, $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et Ω est la matrice de la rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
• ☹ Si on prend la base $(\sin, 2\cos)$ ou $(2\sin, \cos)$ l'énoncé est faux, M ne peut pas s'écrire $\lambda\Omega$..

3.1) $\forall x \in I$, $U_a(f_r) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-(a+r)t}\,dt = e^{ax}\,\frac{e^{-(a+r)x}}{a+r} = \frac{1}{a+r} f_r$

Donc : $\forall r \in [0, +\infty[$, $U_a(f_r) = \frac{1}{a+r} f_r$.

3.2) Soit $\lambda \in]0, \frac{1}{a}]$. $\frac{1}{a+r} = \lambda \iff r = \frac{1}{\lambda} - a$ et, comme $0 < \lambda \leqslant \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} - a \geqslant 0$, on a par 3.1)

$$U_a\left(f_{\frac{1}{\lambda} - a}\right) = \lambda f_{\frac{1}{\lambda} - a} \quad \text{donc } \lambda \in Sp(U_a)$$

puisque $f_{\frac{1}{\lambda} - a}$ n'est pas la fonction nulle

Tout λ de $]0, \frac{1}{a}]$ est valeur propre de U_a :

$$]0, \frac{1}{a}] \subset Sp(U_a)$$

3.3) . Par récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_a^n(f_r) = \left(\frac{1}{a+r}\right)^n f_r$ avec $a+r>0$.

<u>1er cas</u> : $a+r>1$, alors $U_a^n(f_r) \xrightarrow{CVS} 0_E$

<u>2e cas</u> : $a+r=1$, alors $U_a^n(f_r) \xrightarrow{CVS} f_r$

<u>3e cas</u> : $a+r<1$, alors la suite $(U_a^n(f_r))$ diverge

3.4) . À x fixé dans I, la série $\sum_{n\geq 0} U_a^n(f_r)(x)$ converge si, et seulement si, la série de t.g. $\left(\frac{1}{a+r}\right)^n$ converge car $f_r(x)\neq 0$.
Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} U_a^n(f_r)$ converge simplement si, et seulement si, $\frac{1}{a+r}<1$ i.e. $a+r>1$.
.. lorsque $a+r>1$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_a^n(f_r) = \frac{1}{1-\frac{1}{a+r}} f_r = \frac{a+r}{a+r-1} f_r$$

4. Soit $x\in I$. Dans $U_a(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$, effectuons le changement de variable $u : t \mapsto t-x$ C^1 strictement croissant donc licite :

$$U_a(f)(x) = e^{ax}\int_0^{+\infty} e^{-a(u+x)} f(x+u)\,du$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-au} f(x+u)\,du$$

5.1) . $(g_0, g_1, \ldots, g_p)$ est une famille génératrice de F_p.
.. Montrons que $(g_0, \ldots, g_p)$ est libre. Soit $(a_0, \ldots, a_p)$, $p+1$ réels tels que $\sum_{i=0}^{p} a_i g_i = 0$. Alors
$\forall x\in I,\ e^{-x}\left(\sum_{i=0}^{p} a_i x^i\right) = 0$, avec $e^{-x}\neq 0$.
Donc le polynôme $\sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ possède une infinité de racines donc est le polynôme nul.
Donc tous ses coefficients sont nuls :

$$\forall i\in [\![0,p]\!],\ a_i = 0.$$

Donc $(g_0, \ldots, g_p)$ est libre
.:. La famille $\mathcal{B}_p = (g_0, \ldots, g_p)$ est une base de F_p

5.2) Par linéarité de U_a, il suffit de vérifier que $U_a(g_i)\in F_p$ pour tout $i\in[\![0,p]\!]$.
Soit $i\in[\![0,p]\!]$. $\forall x\in I$

$$U_a(g_i)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-(x+t)} (x+t)^i\,dt$$
$$= e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-(a+1)t} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} x^k t^{i-k}\,dt$$
$$= \sum_{k=0}^{i} e^{-x} x^k \underbrace{\left[\binom{i}{k}\int_0^{+\infty} e^{-(a+1)t} t^{i-k}\,dt\right]}_{\overset{\text{déf}}{=}\ \alpha_{i,k}}$$
$$= \sum_{k=0}^{i} \alpha_{i,k}\, g_k(x) \quad \text{donc } U_a(g_i)\in F_p$$

Donc F_p est stable par U_a

5.3 On a : $\forall i \in [\![0,p]\!],\ U_a(g_i) = \sum_{k=0}^{i} \alpha_{i,k}\, g_k$ donc la matrice représentant $U_{a|\mathcal{F}_p}$ dans $\mathcal{B}_p = (g_0, \dots, g_p)$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux les $\alpha_{k,k}$ ($k \in [\![0,p]\!]$).

Or : $\alpha_{k,k} = \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)t}\,dt = \frac{1}{a+1}$ ($\forall k \in [\![0,p]\!]$)

Donc $\det_{\mathcal{B}_p}\left(U_{a|\mathcal{F}_p}\right) = \prod_{k=0}^{p} \alpha_{k,k} = \frac{1}{(a+1)^{p+1}}$.

6. Pour $f \in \mathcal{E}$, on a $|f| \in \mathcal{E}$ et par l'inégalité triangulaire, on a : $\forall x \in I$

$$|U_a(f)(x)| \leq \left| e^{ax} \int^{+\infty} e^{-at} f(x+t)\,dt \right|$$
$$\leq e^{ax} \int_0^{+\infty} e^{-at} |f(x+t)|\,dt$$
$$\leq U_a(|f|)(x).$$

Donc $|U_a(f)| \leq U_a(|f|)$

7. Que l'on prenne la définition issue de 1.h ou la forme de la question 4, la positivité de l'intégrale justifie que si f est positive, alors $U_a(f)$ est positive.

8. Supposons f dans $\mathcal{E}$ décroissante.
Soit $x \in I$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ f(x+t) \leq f(x)$, et $e^{-at} f(x+t) \leq e^{-at} f$

Par croissance de l'intégrale (toutes les intégrales étant convergentes),
$$U_a(f)(x) \leq f(x) \int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt = \frac{f(x)}{a}$$

D'où $aU_a(f) \leq f$

. Comme $U_a(f)$ est solution de (E_a^f) :
$$U_a(f)' = aU_a(f) - f \leq 0.$$

Donc $U_a(f)$ est décroissante

9.1 Soit $x \in I$. $U_a(f')(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f'(t)\,dt$.

Puisque $t \mapsto e^{-at}$ et f sont $\mathcal{C}^1$ sur $[x,+\infty[$ et $\lim_{t\to+\infty} e^{-at} \times f(t) = 0$ car f est bornée, intégrons par parties :
$$U_a(f')(x) = e^{ax}\left(0 - e^{-ax} f(x) + a\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt\right)$$
$$= -f(x) + a\,U_a(f)(x)$$

D'où : $U_a(f') - a\,U_a(f) + f = 0$

9.2 Par 9.1), $U_a \circ D(f) = a\,U_a(f) - f$
Comme U_a est solution de (E_a^f), on a aussi

$$D\circ U_a(f) = aU_a(f) - f$$

Donc : $\forall f\in\mathcal{H},\ D\circ U_a(f) = U_a\circ D(f)$

10 . Par définition de $U_a(f)$, la propriété est vraie pour $n=0$.

.. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. Soit $x\in I$.

$U_a^{n+2}(f)(x) = U_a^{n+1}(U_a(f))(x)$ et par hypothèse de récurrence

$$= e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}\,U_a(f)(t)\,dt$$

$u : t\mapsto e^{-at}U_a(f)(t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[x,+\infty[$ de dérivée $u' : t\mapsto -e^{-at}f(t)$ car $U_a(f)$ est solution de (E_a^f) et $v : t\mapsto\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[x,+\infty[$.

De plus : $u(t)v(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ car $U_a(f)$ est bornée.
En intégrant par parties, puisque $u(x)v(x)=0$,

$$U_a^{n+2}(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-at}f(t)\,dt$$

Ceci est vrai pour tout x de I.

∴ Par le principe de récurrence, la propriété est démontrée pour tout n de $\mathbb{N}$.

11.1) On reconnait une série exponentielle : $\forall x\in I,\ \forall t\geq x,$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t) = e^{t-x}e^{-at}f(t) = e^{-x}e^{(1-a)t}f(t)$$

11.2) Pour $x\in I$, il faut calculer $\sum_{n\geq 0}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)dt$ d'après 10. Utilisons le théorème d'intégration terme à terme.

① Pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n : t\mapsto\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)$ est continue sur $[x,+\infty[$.

② La série de t.g. f_n converge simplement sur $[x,+\infty[$ et sa somme est $T : t\mapsto e^{-x}e^{(1-a)t}f(t)$ continue

③ Soit M tq $|f|\leq M$ sur I.
$\forall n\in\mathbb{N}\ \forall t\in[x,+\infty[,\ |f_n(t)|\leq\frac{t^n}{n!}e^{-at}M$ avec $t\mapsto t^n e^{-at}$ intégrable sur $[x,+\infty[$ car dominée par $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Donc f_n est intégrable sur $[x,+\infty[$.

$$\int_x^{+\infty}|f_n(t)|dt\leq\frac{M}{n!}\int_x^{+\infty}t^n e^{-at}dt\leq\frac{M}{n!}\int_0^{+\infty}t^n e^{-at}dt$$

et en posant $u=at$ et par l'indication de l'énoncé
$\int_x^{+\infty}|f_n(t)|dt\leq\frac{M}{n!}\cdot\frac{n!}{a^{n+1}}\leq\frac{M}{a^{n+1}}$. Comme $a>1$, $\sum_{n\geq 0}\int_x^{+\infty}|f_n(t)|dt$ converge. Le théorème s'applique donc

$$S(x) = e^{(a-1)x}\int_x^{+\infty}e^{(1-a)t}f(t)\,dt$$

11.3) Il suffit de prendre $b=a-1>0$ pour avoir $S=U_b(f)$

Polynômes et calcul de $\zeta(2)$

1. $u = 1+e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}\right) = e^{i\theta/2}\, 2\cos\frac{\theta}{2}$.

1er cas : $\theta = \pi$.

Alors $u = 0$, $|u| = 0$ et u n'a pas d'argument.

2ème cas : $\theta \in [0, \pi[$.

Alors $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0$ donc $|u| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\mathrm{Arg}(u) \equiv \frac{\theta}{2}\ [2\pi]$

3ème cas : $\theta \in]\pi, 2\pi[$.

Alors $2\cos\frac{\theta}{2} < 0$ donc $|u| = -2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\mathrm{Arg}(u) \equiv \frac{\theta}{2}+\pi\ [2\pi]$

2.a) i. $P_1 = 3X^2-1$ et $P_2 = 5X^4-10X^2+1$

ii. On a bien $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

$P_1 = 3\left(X-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(X+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ donc P_1 n'est pas irréductible

$\deg(P_2) = 4 > 2$ donc P_2 n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$

2.b) i. Par la formule du binôme de Newton,

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\left[i^{2n+1-k}-(-i)^{2n+1-k}\right]X^k$$

donc $P_n \in \mathbb{C}_{2n+1}[X]$.

Pour $k = 2n+1$, le coefficient est $1-1=0$ donc $\deg(P_n) \leq 2n$.

Pour $k = 2n$, le coefficient vaut

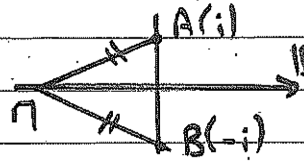
$$\frac{1}{2i}\binom{2n+1}{2n}(i-(-i)) = 2n+1.$$

Donc P_n est un polynôme de degré $2n$ et de coefficient dominant $2n+1$.

ii. Les racines N-ièmes de l'unité sont les N nombres $\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$ où $k \in [\![0, N-1]\!]$.

iii. $P_n(i) = \frac{1}{2i}(2i)^{2n+1} = 2^n(i)^{2n} = (-1)^n.2^{2n}$

iv. Soit z une racine de P_n. Alors $(z+i)^{2n+1} = (z-i)^{2n+1}$ donc $|z+i| = |z-i|$.



Soit A d'affixe i, B d'affixe $-i$ et M d'affixe z.

$|z+i| = |z-i|$ entraîne $AM = BM$ donc M est sur la médiatrice de $[AB]$, qui est l'axe réel. Donc $z \in \mathbb{R}$.

v. $0 = P_n(a) \iff (a+i)^{2n+1} = (a-i)^{2n+1}$

$\iff \left(\frac{a+i}{a-i}\right)^{2n+1} = 1$ car $a \neq i$ d'après (iii)

$\iff \exists k \in [\![0, 2n]\!],\ \frac{a+i}{a-i} = e^{\frac{i2k\pi}{2n+1}}$

$\iff \exists k \in [\![0, 2n]\!],\ a\left(e^{\frac{i2k\pi}{2n+1}}-1\right) = i\left(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}+1\right)$

cette dernière égalité étant impossible si $k=0$.

Donc $P_n(a) = 0 \iff \exists k \in [\![1, 2n]\!]$,

$$a\left(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}-1\right) = i\left(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}+1\right)$$

vi. Les racines de P_n sont, pour $k \in [\![1,2n]\!]$,

$$a_k = i\,\frac{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}+1}{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}-1} = e^{\frac{i\pi}{2}}\,\frac{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}\,2\cos\frac{k\pi}{2n+1}}{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}\,2i\sin\frac{k\pi}{2n+1}}$$

$$\underline{a_k = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{1}{\tan(k\pi/(2n+1))} \in \mathbb{R} \text{ où } k\in[\![0,2n]\!]$$

<u>Remarque:</u> Les $2n$ nombres $\frac{k\pi}{2n+1}$, $k\in[\![1,2n]\!]$ sont $2n$ nombres 2 à 2 distincts de $]0,\pi[$ et la fonction cotan est strictement décroissante sur $]0,\pi[$ (car $\operatorname{cotan}' = -1-\operatorname{cotan}^2 \leq -1$) donc les $2n$ nombres a_k, $k\in[\![1,2n]\!]$ sont deux à deux distinctes. Comme $\deg(P_n)=2n$, P_n a au plus $2n$ racines, donc les $(a_k)_{k\in[\![1,2n]\!]}$ sont <u>toutes les racines de P_n</u> et elles sont <u>toutes réelles et simples</u>.

vii. Reprenons le développement de 2.b.iii

• Pour $k=2p+1$ impair

$$i^{2n+1-(2p+1)} - (-i)^{2n+1-(2p+1)} = i^{2(n-p)} - i^{2(n-p)} = 0$$

donc les coefficients des monômes impairs de P_n sont nuls.

•• Pour $k=2p$ pair

$$\frac{1}{2i}\binom{2n+1}{2p}\left[i^{2n+1-2p} - (-i)^{2n+1-2p}\right] =$$

$$\frac{1}{2i}\binom{2n+1}{2p}\,2(-1)^{n-p}\,i = (-1)^{n-p}\binom{2n+1}{2p} \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, $P_n(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p}\binom{2n+1}{2p} X^{2p}$

et $\underline{Q_n(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p}\binom{2n+1}{2p} X^{p}}$ <u>convient.</u>

viii. Soit $R_n \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant aussi $P_n(X)=R_n(X^2)$

Alors : $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $R_n(\sqrt{x}) = P_n(x) = Q_n(\sqrt{x})$

$$(R_n-Q_n)(\sqrt{x}) = 0$$

Donc R_n-Q_n possède une infinité de racines. Donc $R_n-Q_n = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ et $\underline{R_n=Q_n}$, <u>d'où l'unicité recherchée.</u>

ix. $P_1(X)=3X^2-1$ donc $Q_1(X)=3X-1$ et l'unique <u>racine de Q_1 est $1/3$</u>

$P_2(X)=5X^4-10X^2+1$ donc $Q_2(X)=5X^2-10X+1$ et <u>ses racines sont</u> $\underline{\frac{5\pm2\sqrt{5}}{5}}$.

x. Les n racines a_k, $k\in[\![1,n]\!]$ de P_n sont n nombres strictement positifs distincts, et comme

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\quad Q_n(a_k^2) = P_n(a_k) = 0,$$

les <u>n nombres a_k^2, $k\in[\![1,n]\!]$ sont les n racines de Q_n</u>, puisque $\deg(Q_n)=n$.

3. Le coefficient dominant de Q_n est $2n+1$ et ses racines sont les a_k^2 ($k \in [\![1,n]\!]$) donc

$$Q_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}(X - a_k^2)$$

En développant Q_n:

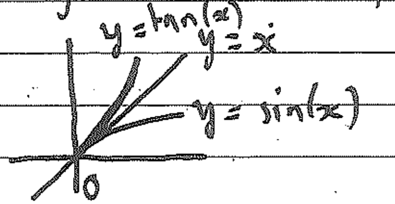
$$Q_n(X) = (2n+1)\left[X^n - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 X^{n-1} + \dots\right]$$

Par unicité du coefficient de X^{n-1}

$$-(2n+1)\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = -\binom{2n+1}{2n-2} = -\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{3!}$$

D'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \underline{\frac{n(2n-1)}{3} = S_n}$

4.a) Remarque : c'est une histoire de convexité (hors programme...). Sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, sin est ~~convexe~~, tan convexe et $y = x$ est l'équation de la tangente (commune) à $\mathcal{C}_{\sin}$ et $\mathcal{C}_{\tan}$ en 0.



$x \mapsto \tan(x) - x$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, de dérivée $x \mapsto \tan^2(x)$ strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, donc est croissante et nulle en 0, donc positive. D'où $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $x \leq \tan(x)$

Le même raisonnement vaut pour $x \mapsto x - \sin(x)$, de dérivée $x \mapsto 1 - \cos(x)$.

Comme sin est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\underline{\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}[,\ 0 \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x)}$$

4.b) Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ et on peut élever au carré puis passer à l'inverse, et comme $\dfrac{1}{\sin^2(x)} = \dfrac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = 1 + \dfrac{1}{\tan^2(x)}$,

$$\underline{\forall x \in]0, \tfrac{\pi}{2}[,\ \frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}}.$$

5. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc

$$\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2 k^2} \leq 1 + \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

En sommant sur $k \in [\![1,n]\!]$ et multipliant par $\dfrac{\pi^2}{(2n+1)^2}$

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} S_n \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}(n + S_n)$$

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{4n^2} \times \frac{2n^2}{3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6}$$

De même $\dfrac{\pi^2}{(2n+1)^2}(n + S_n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6}$

Par encadrement, $\underline{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k}^{n} \frac{1}{k^2}}$ existe et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Séries numériques et séries de fonctions

PARTIE I

1. $RC = 1$ et : $\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.

2. En $x = \frac{-1}{2} \in]-1,1[$, on obtient $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n 2^n}$

d'où : $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k.2^k}$.

3.a). Soit $x \in \mathbb{R}^*$ $\left|\frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \times \frac{k(k+1)}{x^{k+1}}\right| \underset{k\to+\infty}{\sim} |x|$ donc

d'après le critère de D'Alembert, la série converge (absolument) si $|x| < 1$ et diverge (grossièrement) si $|x| > 1$.
Donc le rayon de convergence de cette série entière est 1

.. Soit $S :]-1,1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$.

S est dérivable (et même $\mathcal{C}^\infty$ comme somme de série entière) et

$$\forall x \in]-1,1[,\quad S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

Primitivons S' en intégrant par parties :

$$\int^x -\ln(1-t)\,dt = \left[(1-t)\ln(1-t)\right]^x + \int^x 1\,dt$$
$$= (1-x)\ln(1-x) + x + cte.$$

S étant la primitive nulle en 0 de S', on a :

$$\forall x \in]-1,1[,\quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = (1-x)\ln(1-x) + x$$

3.b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = 2S\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) + 1$

Remarque : cela donne un second développement en série de $\ln(2)$:

$$\ln(2) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$$

4.a) La suite $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\geq 1}$ est décroissante de limite nulle.
Donc, par le théorème des séries alternées, la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge

4.b) Le théorème des séries alternées affirme que le reste est majoré en valeur absolue par la valeur absolue de son premier terme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

4.c) On a :

(i) $\forall x \in [0,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

(ii) $\lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln(2)$ (par continuité de la fonction ln)

Si $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ est continue sur $[0,1]$, alors

alors on aura $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Utilisons le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions.

① $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $x \longmapsto \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ est continue sur $[0,1]$

② Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n : x \longmapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ sur $[0,1]$.

Par 4.b), $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$, donc $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc la convergence de la série de fonctions $x \longmapsto \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ est uniforme.

Par conséquent, la fonction : $x \longmapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ est continue sur $[0,1]$.

Du coup : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$

PARTIE II

1.a) $\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^n}$

On a pour $k \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{2^k} = U_k$ mais aussi

$\frac{1}{2^k} = U_{k-1} - U_k$, s'il faut deux termes.

Remarque : $U_k = \frac{1}{2^k}$ donc les séries de t.g. $\alpha_k U_k$ avec $|\alpha_k| \leq 1$ convergent

1.b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k 2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k}(U_{k-1} - U_k)$

$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1}}{k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{U_k}{k+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k}$

$R_n = \frac{U_n}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) U_k = \frac{U_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$.

1.c) Comme $U_k = \frac{1}{2^k}$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}\right|$

$\leq \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k 2^k} \leq \frac{1}{n+1} R_n$ donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = o(R_n)$

1.d) 1.b) et 1.c) entraînent que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{U_n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{U_n}{n}$

Comme $U_n = \frac{1}{2^n}$, $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n 2^n}$

2.a) En sommant les n premiers termes de la suite géométrique de raison $-t \neq 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1]$,

$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$

2.b) Intégrons cette relation pour t parcourant $[0,1]$:

$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{1}{k+1} = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$

Or $\ln(2) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = S_n$ puisque S_n est le reste d'ordre n de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ dont la somme vaut $\ln(2)$ (cf. I.4.c), donc

$$S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

2.c) Voilà qui sent l'intégration par parties...

$t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$ et $t \mapsto \frac{1}{t+1}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)(t+1)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-t^{n+1}}{(n+1)(1+t)^2}\,dt$

D'où $\displaystyle S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,dt$

2.d) Comme $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,dt \leqslant \int_0^1 t^{n+1}\,dt \leqslant \frac{1}{n+1}$

par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,dt = 0$

Donc $\displaystyle S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$

3. Inspirons-nous de la stratégie de la question II.1)

$$V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1}-U_k}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{U_k}{(k+1)(k+2)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$$

$$= \frac{U_n}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{k(k+1)}\right]U_k$$

$$= \frac{U_n}{(n+1)(n+2)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}U_k$$

Or $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}U_k\right| \leqslant \frac{2}{n+2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k(k+1)} \leqslant \frac{2}{n+2}V_n$

donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}U_k = o(V_n)$.

Par conséquent,

$$V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{U_n}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 \cdot 2^n}$$

4. Le reste étant la différence entre la somme et la somme partielle, une série converge d'autant plus vite que son reste est petit.

Comme : $V_n = o(R_n)$ et $R_n = o(S_n)$, la série qui converge le plus rapidement est la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)2^k}$ et celle qui converge le plus lentement est $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Chaînes de Markov

Exercice 1

1.a) La formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X_n=1],[X_n=0])$ donne

$$P([X_{n+1}=1]) = P([X_n=1])P_{[X_n=1]}([X_{n+1}=1]) + P([X_n=0])P_{[X_n=0]}([X_{n+1}=1])$$

$$P([X_{n+1}=1]) = p\,P([X_n=1]) + q\,P([X_n=0])$$

De la même façon, on a:

$$P([X_{n+1}=0]) = (1-p)\,P([X_n=1]) + (1-q)\,P([X_n=0])$$

Donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad U_{n+1} = U_n S \text{ où } S = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q\end{pmatrix}$$

1.b) Par une récurrence immédiate,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad U_n = U_1 S^{n-1}$$

1.c) $\cdot\ rg(S-I_2) = rg\begin{pmatrix} p-1 & 1-p \\ q & -q\end{pmatrix} = 1 < 2$, $1\in Sp(S)$

$\cdot\ \chi_S(\lambda) = \lambda^2 - (1+p-q)\lambda + p-q$ et : $\chi_S(\lambda)=0 \iff \begin{cases}\lambda = 1\\ \text{ou}\\ \lambda = p-q\end{cases}$

. Comme $p<1$ et $q>0$, $p-q\neq 1$. Donc S admet deux valeurs propres distinctes et étant d'ordre 2, elle est diagonalisable.

1.d) $\cdot\ E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $E_{p-q} = \mathrm{Ker}\,(S-(p-q)I_2) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} q & 1-p \\ q & 1-p\end{pmatrix}\right)$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1-p\\-q\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}p-1\\q\end{pmatrix}\right)$$

En prenant $P = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & q\end{pmatrix}$, on a $P^{-1} = \dfrac{1}{1+q-p}\begin{pmatrix} q & 1-p \\ -1 & 1\end{pmatrix}$

et $P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-q\end{pmatrix}$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-q)^n\end{pmatrix}P^{-1}$

Comme $|p-q|<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S^n = \dfrac{1}{1+q-p}\begin{pmatrix} q & 1-p \\ q & 1-p\end{pmatrix}$.

Par 1.b) $\lim\limits_{n\to+\infty} P([X_n=1]) = \dfrac{q}{1+q-p}\underbrace{\left(P([X_1=1]) + P([X_1=0])\right)}_{=1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} P([X_n=1]) = \dfrac{q}{1+q-p}$ car $([X_1=1],[X_1=0])$ est un système complet.

2.a) Soit pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = P([X_n=1])$. La formule des probabilités totales de 1.a) donne:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_{n+1} = p\,u_n + q\,(1-u_n)$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_{n+1} = (p-q)u_n + q$$

donc (u_n) est arithmético-géométrique.

2.b) Comme : $x = (p-q)x+q \iff x = \dfrac{q}{1+q-p}$,

la suite $\left(u_n - \dfrac{q}{1+q-p}\right)$ est géométrique, de raison $(p-q)$ avec $|p-q|<1$ donc tend vers 0.

Donc $u_n = P([X_n=1]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{q}{1+q-p}$.

Exercice 2

1. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{1\leq i\leq 4}$ donne $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![1,4]\!]$,

$$P([X_{n+1}=k]) = \sum_{i=1}^{4} P([X_n=i]) P_{[X_n=i]}([X_{n+1}=k])$$

$$= \frac{1}{10} P([X_n=k]) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{4} \frac{3}{10} P([X_n=i])$$

En posant $Q = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = Q\, P_n$.

Par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = Q^n P_0$

2.a) Q est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral.

2b) . Sur chaque ligne de Q, la somme des coefficients vaut 1. En notant $V \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ la colonne dont tous les coefficients valent 1, on a : $QV = V$.

Donc $1 \in S_p(Q)$.

.. On observe que $Q + \frac{2}{10} I_4$ est de rang 1 donc $-\frac{1}{5} \in S_p(Q)$ et $\dim(E_{-1/5}) = 4 - rg(Q + \frac{1}{5} I_4) = 3$

∴ Par conséquent, $\dim(E_1) = 1$ et

$S_p(Q) = \{-\frac{1}{5}, 1\}$, $E_1 = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $E_{-1/5} = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$

2.c) Soit $D = diag(1, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$. Il existe $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $Q = PDP^{-1}$.

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q^n = PD^nP^{-1}$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n = diag(1,0,0,0)$

Notons Λ cette limite. Alors :

(Q^n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} Q^n = P\Lambda P^{-1} = L$

3.a) Comme Q est symétrique réelle, il existe par le théorème spectral une matrice $U \in O_4(\mathbb{R})$ telle que ${}^tUQU = \Lambda$.

b) On a alors $L = U\Lambda {}^tU$ donc $L^2 = U\Lambda^2 {}^tU = L$ car $\Lambda^2 = \Lambda$. Donc L est une matrice de projectio[n]

De plus ${}^tL = {}^t(U\Lambda {}^tU) = U\Lambda {}^tU = L$ donc L est symétrique. Donc L est une matrice de projection orthogonale.

Enfin, comme $rg(L) = rg(\Lambda) = 1$, l'image de cette projection est de dimension 1, et comme $V \in SEP(Q,1)$, $QV = V$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q^n V = V$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} Q^n V = V$ donc $LV = V$ donc $Im(L) = Vect(V)$.

L est la matrice de la projection orthogonale sur $Vect(V)$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \lim\limits_{n\to+\infty} Q^n P_0 = LP_0 = p_{Vect(V)}(P_0)$

$= (P_0 | \frac{1}{2}V)\, \frac{1}{2}V$ car $\left(\frac{1}{2}V\right)$ est une base orthonormale de $Vect(V)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} P([X_0=i])\, V = \frac{1}{4} V$ car

$([X_0=i])_{1\leq i\leq n}$ est un système complet d'évènements.

Ainsi :
$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Cette limite ne dépend pas de la position initiale.

3.d) La loi limite de la suite de variable (X_n) est la loi uniforme sur $[\![1,4]\!]$.

Exercice 3

1.a) Il suffit de constater que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$,
$$(MU)_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\times 1 = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}.$$

Donc ② $\iff MU=U$

1.b) Le produit de deux matrices à coefficients positifs (resp. strictement positifs) est à coefficients positifs (resp. strictement positif).
De plus, si A et B sont stochastiques, on a :
$$ABU = A(BU) = AU = U.$$
Donc AB vérifie ②.
Ainsi le produit de deux matrices stochastiques (resp. strictement) est stochastique (resp. strictement).

1.c) Si M est stochastique alors M^n est stochastique pour tout $n\in\mathbb{N}$ d'après 1.b). La convergence par coordonnées entraîne que tous les coefficients de $\lim\limits_{n} M^n$ sont positifs (au sens large).

De plus : $\forall n\in\mathbb{N}$, $M^nU=U$ donc par continuité du produit matriciel, $\lim\limits_{n\to+\infty}(M^n)\,U=U$.

Donc $\lim\limits_{n} M^n$ est une matrice stochastique, non nécessairement strictement même si M est strictement stochastique. On ne prolonge que des inégalités larges en passant à la limite.

2.a) De $MV=\lambda V$ on tire $\sum_{j=1}^{n} m_{k,j}v_j = \lambda v_k$.

Par l'inégalité triangulaire
$$|\lambda v_k| \leq \sum_{j=1}^{n} |m_{k,j}|\cdot|v_j| \text{ où } m_{k,j}\geq 0 \text{ et } |v_j|\leq |v_k|$$
$$|\lambda|\cdot|v_k| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} m_{k,j}\right)|v_k| \leq |v_k| \text{ car } M \text{ est}$$
stochastique.

2.b) V est non nul car c'est un vecteur propre donc $|v_k| = \max\limits_{1\leq i\leq n}(|v_i|) > 0$.

En divisant 2.a) par $|v_k|$, on a : $|\lambda|\leq 1$.

2.c) On a $\sum_j m_{k,j} v_j = \lambda v_k$ (k-ème ligne du produit $MV = \lambda V$)

Donc $\sum_{j \neq k} m_{k,j} v_j = (\lambda - m_{k,k}) v_k$

Puis par l'inégalité triangulaire :

$|\lambda - m_{k,k}| . |v_k| \leqslant \sum_{j \neq k} m_{k,j} |v_j| \leqslant \left(\sum_{j\neq k} m_{k,j}\right) |v_k|$

or $\sum_{j \neq k} m_{k,j} = 1 - m_{k,k}$ et $|v_k| > 0$ donc

$$|\lambda - m_{k,k}| \leqslant 1 - m_{k,k}$$

2.d) Par 2.b), on sait que $|\lambda| \leqslant 1$.

Supposons $|\lambda| = 1$ et écrivons $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

$|\lambda - m_{k,k}|^2 \leqslant (1 - m_{k,k})^2 \Rightarrow (\cos\theta - m_{kk})^2 + \sin^2\theta \leqslant (1 - m_{kk})^2$

$\Rightarrow 1 - 2 m_{k,k} \cos(\theta) + m_{kk}^2 \leqslant 1 - 2 m_{kk} + m_{kk}^2$

$\Rightarrow \cos(\theta) \geqslant 1$ (car $m_{kk} > 0$) $\Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \lambda = 1$.

D'où si $\lambda \neq 1$ alors $|\lambda| < 1$.

2.e) La k-ème ligne du produit $MX = X$ donne

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} m_{k,j} x_j$$

Supposons qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i < x_k$.

Alors

$x_k \leqslant \sum_{j \neq i} m_{k,j} x_k + m_{k,i} x_i < \sum_j m_{k,j} x_k < x_k$

ce qui est absurde.

Donc : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \geqslant x_k$. Et comme $x_k = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, on a : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = x_k$

Donc $X = x_k . U$. Donc $X \in \mathrm{Vect}(U)$

Remarque : si $x_k < 0$, le raisonnement précédent montre que $-X = -x_k U$ donc $X = x_k U$, d'où l'hypothèse $x_k > 0$ sans perte de généralité.

3. Supposons M strictement stochastique diagonalisable

. Par 2),

(i) $1 \in S_p(M)$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(U)$

(ii) Si $\lambda \in S_p(M)$ avec $\lambda \neq 1$, alors $|\lambda| < 1$.

. M est diagonalisable donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} M P = \mathrm{diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = D$ où $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $|\lambda_i| < 1$.

Alors : $\forall m \in \mathbb{N}$, $M^m = P D^m P^{-1}$

Et : $\lim_{m \to +\infty} D^m = \mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0) = \Delta$

. Du coup, $L = \lim_{m \to +\infty} M^m = P \Delta P^{-1}$, et on a :

(i) $rg(L) = rg(\Delta) = 1$

(ii) $\Delta^2 = \Delta$ donc $L^2 = P \Delta^2 P^{-1} = P \Delta P^{-1} = L$

4. . $rg(M) = 2$ donc $0 \in S_p(M)$ et $\dim(E_0) = 1$.
.. M est strictement stochastique donc $1 \in S_p(M)$ et $\dim(E_1) = 1$
∴ Supposons que M possède une 3-ème valeur propre λ. Alors M serait diagonalisable et on aurait $Tr(M) = 0 + 1 + \lambda$ i.e $1 = 1 + \lambda$ donc $\lambda = 0$, ce qui est absurde.
∷ Donc $Sp(M) = \{0, 1\}$ et M n'est pas diagonalisable car $\dim(E_0) + \dim(E_1) = 2 < 3$.

Exercice 4

1.a) J_n est symétrique réelle donc diagonalisable par le théorème spectral.

1.b) $J_n^2 = n J_n$

Supposons que λ soit une valeur propre de J_n et X un vecteur propre associé.

$J_n^2 X = J_n(J_n X) = J_n \lambda X = \lambda^2 X$ et

$J_n^2 X = n J_n X = n\lambda X$.

Comme $X \neq 0$, $\lambda^2 = n\lambda$ donc $\lambda \in \{0, n\}$

1.c) . $rg(J_n) = 1$, donc $0 \in S_p(J_n)$ et $\dim(E_0) = n-1$.

$$E_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\\-1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\{E_1 - E_j \,;\, j \in [\![2, n]\!]\}$$

. Avec $U = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$, $J_n U = nU$ donc $n \in S_p(J_n)$ et $E_n = \mathrm{Vect}(U)$ car E_n ne peut être que de dimension 1, E_0 étant de dimension $n-1$.

2.a) $(\alpha J_n)^2 = \alpha J_n \iff \alpha^2 n J_n = \alpha J_n \iff \alpha = \frac{1}{n}$ car $\alpha \neq 0$.

Ainsi $\frac{1}{n} J_n$ est la matrice canoniquement associée à un projecteur p de $\mathbb{R}^n$

2.b) $\frac{1}{n} J_n$ est symétrique et la base canonique est orthonormale donc p est un endomorphisme symétrique. Comme c'est un projecteur c'est un projecteur orthogonal

3.a) . $F = \mathrm{Vect}(I_n, J_n)$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

.. $\forall (\alpha, \beta, \alpha', \beta') \in \mathbb{R}^4$,

$$M(\alpha,\beta)\, M(\alpha',\beta') = ((\alpha-\beta) I_n + \beta J_n)((\alpha'-\beta') I_n + \beta' J_n)$$
$$= (\alpha-\beta)(\alpha'-\beta') I_n + \left[(\alpha-\beta)\beta' + (\alpha'-\beta')\beta + \beta\beta' n\right] J_n$$

Donc $M(\alpha,\beta) M(\alpha',\beta') \in F$ et F est stable par le produit

3.a) . Toute matrice $M(\alpha,\beta)$ de F est symétrique réelle donc diagonalisable par le théorème spectral.

.. Toute $M(\alpha, 0) = \alpha I_n$ est diagonale avec $Sp(M) = \{\alpha\}$ et $SEP(M(\alpha,0), \alpha) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

.. Soit $M(\alpha,\beta) \in F$ avec $\beta \neq 0$.

Soit $U \in SEP(J_n, 0)$ (i.e. $J_n U = 0$)

Alors $M(\alpha,\beta)U = (\alpha-\beta)U$

Donc $(\alpha-\beta) \in Sp(M(\alpha,\beta))$ et

$SEP(M(\alpha,\beta), \alpha-\beta)$ contient $SEP(J_n, 0)$

Pour $U \in SEP(J_n, n)$,

$M(\alpha,\beta)\, U = (\alpha-\beta+\beta n)U$

Donc $(\alpha-\beta+\beta n) \in Sp(M(\alpha,\beta))$ et

$SEP(M(\alpha,\beta), \alpha-\beta+\beta n)$ contient $SEP(J_n, n)$

Comme $\beta \neq 0$, ces deux valeurs propres sont distinctes et finalement :

(i) $Sp(M(\alpha,\beta)) = \{\alpha-\beta, \alpha-\beta+n\beta\}$

(ii) $SEP(M(\alpha,\beta), \alpha-\beta) = SEP(J_n, 0) = \mathrm{Ker}(J_n)$

$SEP(M(\alpha,\beta), \alpha-\beta+n\beta) = SEP(J_n, n) = \mathrm{Ker}(J_n - nI_n)$

4.a) On a $\alpha+(n-1)\beta = 1$ donc $Sp(M(\alpha,\beta)) = \{1, \alpha-\beta\}$

Je suppose $M(\alpha,\beta) \neq I_n$ (i.e. $(\alpha,\beta) \neq (1,0)$) et $n \geq 3$.

Alors $\alpha-\beta \neq 1$, et même $|\alpha-\beta| < 1$.

Alors S est semblable à $\mathrm{diag}(1, \alpha-\beta, \dots, \alpha-\beta) = D$

Comme $D^m \longrightarrow \Delta = \mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0)$, la suite (S^m) converge.

b) $L = \lim_{m\to+\infty} S^m = P\Delta P^{-1}$ est la matrice d'un projecteur de rang 1, car $L^2 = L$ et $rg(\Delta) = 1$.

De plus, $\forall m \in \mathbb{N}$, $S^m U = U$ où U désigne $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

Donc $LU = \lim_{m\to+\infty} (S^m U) = U$.

Donc L est la matrice de la projection sur $\mathrm{Vect}(U)$.

D'où $\lim_{m\to+\infty} S^m V = LV = \alpha U$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la somme des coefficients de $S^m V$ vaut 1 car :

$(U|S^m V) = {}^tU S^m V = {}^t(S^m U)V$ car S est symétrique

$= {}^tU.V$ car $S^m U = U$ car S est stochastique

$= \sum v_i = 1$

et $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(U|Y) = {}^tUY = \sum_i y_i$.

Donc : $(U|LV) = (U|\lim_{m\to+\infty} S^m V) = \lim_{m\to+\infty} (U|S^m V)$

par continuité du produit scalaire, donc

$(U|LV) = \lim_{m\to+\infty} 1 = 1$

Donc $LV = \begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \vdots\\ \alpha\end{pmatrix}$ avec $\alpha+\alpha+\dots+\alpha = 1$, donc

$$LV = \frac{1}{n}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{n}U.$$

Dans une chaîne de Markov de matrice de transition $M(\alpha,\beta) \neq I_n$, la loi limite est la loi uniforme ..

... et l'exercice 2 avec $n=4$, $\alpha = \frac{1}{10}$, $\beta = \frac{3}{10}$ en est un exemple.