Table des matières

1 Nombres réels et complexes

1.1 **Majorant et minorant d'une partie de $\mathbb{R}$**

Soit $\mathrm{P} \subset \mathbb{R}$.

$\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ est un majorant de P si $\forall x \in \mathrm{P}, x \leq \mathrm{M}$.

$m \in \mathbb{R}$ est un minorant de P si $\forall x \in \mathrm{P}, m \leq x$.

1.2 **Maximum et minimum d'une partie de $\mathbb{R}$**

Soit $\mathrm{P} \subset \mathbb{R}$.

(i) $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ est le maximum de P si $\mathrm{M} \in \mathrm{P}$ et $\forall x \in \mathrm{P}, x \leq \mathrm{M}$. On note alors $\mathrm{M} = \max(\mathrm{P})$.

(ii) $m \in \mathbb{R}$ est le minimum de P si $m \in \mathrm{P}$ et $\forall x \in \mathrm{P}, m \leq x$. On note alors $m = \min(\mathrm{P})$.

☞ Toute partie même non vide de P n'admet pas nécessairement un maximum et/ou un minimum.

1.3 **Borne supérieure et borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$**

(i) Toute partie P *non vide et majorée* de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure notée $\sup(\mathrm{P})$: c'est le plus petit de ses majorants.

Caractérisation : $\mathrm{M} = \sup(\mathrm{P}) \Longleftrightarrow \forall x < \mathrm{M},\ \exists y \in \mathrm{P},\ x < y \leq \mathrm{M}$. (ii) Toute partie P *non vide et majorée* de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure notée $\sup(\mathrm{P})$: c'est le plus petit de ses majorants.

Caractérisation : $\mathrm{M} = \sup(\mathrm{P}) \Longleftrightarrow \forall x < \mathrm{M},\ \exists y \in \mathrm{P},\ x < y \leq \mathrm{M}$.

1.4 **Partie entière d'un réel**

Soit $x \in \mathbb{R}$. La partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est définie par :

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \quad \text{et } quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

1.5 **Segments et intervalles de $\mathbb{R}$**

(i) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$. Le *segment* $[\,a\,;\ b]$ est défini par

$$[\,a\,;\ b] \overset{\text{déf.}}{=} \big\{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\big\}.$$

(ii) Une partie P de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si,

$$\forall (a,b) \in \mathrm{P} \textit{ avec } a \leq b, \quad [\,a\,;\ b] \subset \mathrm{P}.$$

1.6 **Inégalité triangulaire**

$\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2, \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x-y| \leq |x| + |y|.$

1.7 **Formulaire dans $\mathbb{C}$**

① $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$

② $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{\mathcal{R}e(z)}\mathrm{e}^{i\mathcal{I}m(z)}$

③ $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z|^2 = z\overline{z}$ et $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{re(z)}$

④ Euler : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2}$ et $\sin(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}$

⑤ De Moivre : $\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\cos(t) + i\sin(t))^n = \cos(nt) + i\sin(nt)$

⑥ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z^n = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists! k \in [\![\,0\,;\ n-1]\!]\,,\ z = \omega_k \overset{\text{déf.}}{=} \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{n}\right)$

⑦ $\mathbb{U}_n = \{\omega_k | k \in [\![\,0\,;\ k-1]\!]\}$ et $\forall n \geq 1, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$

1.8 **Formulaire trigonométrique**

① $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

② $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1, \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

③ $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$

$\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$

$\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big)$

④ $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)},\ \tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$

⑤ $a\cos(t) + b\sin(t) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\varphi)$ où $\begin{cases} \cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

1.9 **Équation du second degré à coefficients réels**

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et (E) : $\quad ax^2 + bx + c = 0.$

Soit $\Delta \overset{\text{déf.}}{=} b^2 - 4ac.$

① Si $\Delta > 0$, alors $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, racines réelles distinctes.

② Si $\Delta = 0$, alors $x = \dfrac{-b}{2a}$, racine réelle double.

③ Si $\Delta < 0$, alors $x = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, racines complexes conjuguées.

1.10 Équation du second degré à coefficients complexes

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et (E) : $\quad az^2 + bz + c = 0.$

Soit $\Delta \overset{\text{déf.}}{=} b^2 - 4ac$ et δ tel que $\delta^2 = \Delta$

① Si $\Delta \neq 0$ alors $z = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$, racines distinctes.

② Si $\Delta = 0$, alors $z = \dfrac{-b}{2a}$, racine double.

1.11 Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit

$$\begin{cases} a + b = \mathrm{S} \\ ab = \mathrm{P} \end{cases} \iff \begin{cases} a \text{ et } b \text{ sont les solutions de} \\ z^2 - \mathrm{S}z + \mathrm{P} = 0. \end{cases}$$

1.12 Coefficients binomiaux, formule du binôme

① $\dbinom{n}{p}$ est le nombre de façons de choisir p éléments distincts parmi n sans tenir compte de l'ordre. C'est aussi le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à $n$éléments.

② $\dbinom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n, \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$

③ $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$, relation de Pascal : $\dbinom{n+1}{p+1} = \dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1}$

④ Formule du binôme de Newton : $\forall (a, b) \in \mathbb{K}^2, \quad (a+b)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$

2 Suites et sommes de référence

2.1 Suites arithmétiques

① La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est *arithmétique de raison* $r \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall n \geq n_0, \qquad u_{n+1} - u_n = r.$$

On notera que la raison r est indépendante de l'indice n.

② Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.

- $\forall n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$;
- $\forall n \geq n_0, \quad \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \frac{(n - n_0 + 1)(u_{n_0} + u_n)}{2}$,

alias : $\dfrac{(\textit{nombre de termes}) \times (\textit{premier terme} + \textit{dernier terme})}{2}$

2.2 Suites géométriques

① La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est *géométrique de raison* $q\in\mathbb{R}$ si, et seulement si,
$$\forall n\geq n_0,\qquad u_{n+1}=qu_n.$$
On notera que la raison q est indépendante de l'indice n.

② Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison $q\in\mathbb{R}$.

- $\forall n\geq n_0,\quad u_n=q^{n-n_0}u_{n_0}$;
- $\forall n\geq n_0,\quad \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n}u_k=\begin{cases}u_{n_0}\dfrac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q}\text{si } q\neq 1\\(n-n_0+1)u_{n_0}\text{si } q=1\end{cases}$

alias : $(premier\ terme)\times\dfrac{1-raison^{nombre\ de\ termes}}{1-raison}$

- Si $u_{n_0}\neq 0$, alors
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\begin{cases}sign(u_{n_0})\times(\infty) & \text{si } q>1\\ u_{n_0} & \text{si } q=1\\ 0 & \text{si } -1<q<1\\ n'existe\ pas & \text{sinon}\end{cases}$$

2.3 Suites arithmético-géométriques

① La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est *arithmético-géométrique* si, et seulement si,
$$\exists a\neq 1,\exists b\neq 0,\forall n\geq n_0,\qquad u_{n+1}=au_n+b\qquad(\mathcal{R})$$
On notera que les paramètres a et b sont indépendants de l'indice n.

② Comme $a\neq 1$, il existe un unique réel ℓ tel que $(\mathcal{E})$: $\qquad \ell=a\ell+b$.
$(\mathcal{R})-(\mathcal{E})$ donne : $\forall n\geq n_0,\quad u_{n+1}-\ell=a(u_n-\ell)$.
La suite $(u_n-\ell)$ est géométrique de raison a, de premier terme $u_{n_0}-\ell$, et on a :
$$\forall n\geq n_0,\qquad u_n=a^{n-n_0}(u_{n_0}-\ell)+\ell.$$

③ Deux interprétations pour ℓ. D'une part, la suite $(\ell)_{n\geq n_0}$ est l'unique suite constante vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R})$. D'autre part (lorsque $u_{n_0}\neq\ell$), la suite u converge si, et seulement si, $a\in\,]-1\,;\,1[$. Et alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$.

2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

① La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ vérifie une *relation de récurrence linéaire d'ordre 2* si, et seulement si,
$$\exists a\in\mathbb{K},\exists b\in\mathbb{K}^*,\forall n\geq n_0,\qquad u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n\qquad(\mathcal{R}).$$
On notera que les paramètres a et b sont indépendants de l'indice n.

② **Théorème dans $\mathbb{R}$**, *i.e.* quand $(a,b,u_{n_0},u_{n_0+1})\in\mathbb{R}^4$.
Soit $(\mathcal{E})$ l'équation caractéristique associée à la relation $(\mathcal{R})$:
$$(\mathcal{E})\qquad x^2-ax-b=0.$$

- *Premier cas :* $(\mathcal{E})$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.

Alors : $\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\qquad\forall n\geq n_0,\qquad u_n=\alpha r_1^n+\beta r_2^n.$

• *Deuxième cas :* $(\mathcal{E})$ possède une unique racine réelle r.

Alors : $\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \qquad \forall n\geq n_0, \qquad u_n=(\alpha+\beta n)r^n.$

• *Troisième cas :* $(\mathcal{E})$ ne possède pas de racine réelle mais deux racines complexes conjuguées $r\mathrm{e}^{i\theta}$ et $r\mathrm{e}^{-i\theta}$.

Alors : $\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \qquad \forall n\geq n_0, \qquad u_n=(\alpha\cos(n\theta)+\beta\sin(n\theta))r^n.$

③ **Théorème dans** $\mathbb{C}$, *i.e.* quand $(a,b,u_{n_0},u_{n_0+1})\in\mathbb{C}^4$.

Soit $(\mathcal{E})$ l'équation caractéristique associée à la relation $(\mathcal{R})$:

$$(\mathcal{E}) \qquad x^2-ax-b=0.$$

• *Premier cas :* $(\mathcal{E})$ possède deux racines complexes distinctes r_1 et r_2.

Alors : $\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2, \qquad \forall n\geq n_0, \qquad u_n=\alpha r_1^n+\beta r_2^n.$

• *Deuxième cas :* $(\mathcal{E})$ possède une unique racine complexe r.

Alors : $\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2, \qquad \forall n\geq n_0, \qquad u_n=(\alpha+\beta n)r^n.$

2.5 Sommes finies de référence

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$; ② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; ③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

④ $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{1\leq i,j\leq n,i\neq j}a_ia_j=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j$

2.6 Gestion des sommes doubles

Cas d'indices indépendants

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}u_{i,j}\right)=\sum_{1\leq i\leq m,1,\leq j\leq n}u_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}u_{i,j}\right)$$

Cas d'indices dépendants

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{i}u_{i,j}\right)=\sum_{1\leq j\leq i\leq m}u_{i,j}=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=j}^{m}u_{i,j}\right)$$

3 Théorèmes de première année sur les suites

3.1 Suite bornée, minorée, majorée

Notez que dans les définitions suivantes, les réels B, m *et* M *sont indépendants de l'indice (muet)* n *et ne dépendent que de la suite* u *considérée.*

① La suite $u\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *bornée* si, et seulement si,

$$\exists \mathrm{B}\in\mathbb{R}, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad |u_n|\leq \mathrm{B}.$$

② La suite $u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est *minorée* si, et seulement si,

$$\exists m\in\mathbb{R}, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad m\leq u_n.$$

③ La suite $u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est *majorée* si, et seulement si,

$$\exists \mathrm{M}\in\mathbb{R}, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_n\leq \mathrm{M}.$$

④ La suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, elle est à la fois minorée et majorée.

3.2 Définition de la convergence d'une suite

La suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers le scalaire ℓ si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq \mathrm{N}, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors : $\quad u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell.$

3.3 Corollaire immédiat pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

À savoir justifier.

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \text{ si, et seulement si,}$$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ tq \ a < \ell < b, \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq \mathrm{N}, \quad a < u_n < b.$$

3.4 Unicité de la limite

Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ et $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell'$ alors $\ell = \ell'$.

3.5 Limites infinies

La suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si, et seulement si,

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq \mathrm{N}, \quad u_n \geq \mathrm{M}.$$

On écrit alors : $\quad u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$

La suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si, et seulement si,

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq \mathrm{N}, \quad u_n \leq \mathrm{M}.$$

On écrit alors : $\quad u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty.$

3.6 Théorème de convergence monotone

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite **croissante**.

u est convergente si, et seulement si, u est majorée.

u diverge vers $+\infty$ si, et seulement si, u n'est pas majorée.

On notera que, pour une suite u croissante, « $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ » a toujours un sens.

3.7 Suites extraites

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite.

① Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application **strictement croissante**.

La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est appelée *suite extraite* de la suite u. La fonction φ est appelée *fonction extractrice*.

② Les exemples les plus fréquents de suites extraites de u sont les suites (u_{n+1}), (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

③ La suite u converge vers le scalaire ℓ si, et seulement si, toute suite extraite de u converge vers ℓ.

④ La suite u converge vers le scalaire ℓ si, et seulement si, les deux suites extraites de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ.

On utilise fréquemment ④ ou ③ pour **justifier qu'une suite diverge**.

3.8 **Théorème des suites adjacentes**

• Deux suites u et v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont dites *adjacentes* si

① l'une croît,

② l'autre décroît,

③ la suite $v - u$ converge vers 0.

• Si les suites u et v sont adjacentes, alors elles sont convergentes, vers une même limite.

De plus, si u croît, v décroît et $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, alors
$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad u_m \leq \ell \leq v_n.$$

3.9 **Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ et $a \in \bar{\mathrm{I}}$, *i.e.* a est un point de I ou une borne de I, éventuellement égale à $-\infty$ ou $+\infty$.

Alors f tend vers ℓ en a si, et seulement si, pour toute suite $u \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}$ de limite a, la suite $\big(f(u_n)\big)$ tend vers ℓ.

4 Théorèmes d'analyse de première année

4.1 **Théorème de Rolle**

Soit $a < b$ et $f : [\,a\,;\; b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[\,a\,;\; b]$ et dérivable sur $]\,a\,;\; b[$.

Si $f(a) = f(b)$, alors : $\exists c \in \,]\,a\,;\; b[\,, \quad f'(c) = 0$.

4.2 **Théorème des accroissements finis**

Soit $a < b$ et $f : [\,a\,;\; b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[\,a\,;\; b]$ et dérivable sur $]\,a\,;\; b[$.

Alors : $\exists c \in \,]\,a\,;\; b[\,, \quad f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

4.3 **Inégalité des accroissements finis dans $\mathbb{R}$**

Soit $a < b$ et $f : [\,a\,;\; b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[\,a\,;\; b]$ et dérivable sur $]\,a\,;\; b[$.

① **On suppose qu'il existe $(m, \mathrm{M}) \in \mathbb{R}^2$** tels que :
$$\forall x \in \,]\,a\,;\; b[\,, m \leq f'(x) \leq \mathrm{M}.$$
Alors : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \mathrm{M}(b-a)$.

② **On suppose qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$** tels que :
$$\forall x \in \,]\,a\,;\; b[\,, |f'(x)| \leq \mathrm{M}.$$
Alors : $|f(b) - f(a)| \leq \mathrm{M}\,|b-a|$.

4.4 **Inégalité des accroissements finis dans $\mathbb{C}$**

Soit $a < b$ et $f : [\,a\,;\; b] \to \mathbb{C}$, continue sur $[\,a\,;\; b]$ et dérivable sur $]\,a\,;\; b[$.

On suppose qu'il existe M $\in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \,]\,a\,;\; b[\,, |f'(x)| \leq \mathrm{M}$.

Alors : $|f(b) - f(a)| \leq \mathrm{M}\,|b - a|$.

4.5 **Théorème de la limite de la dérivée**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$.

Si $f'(x)$ admet une limite ℓ (finie ou infinie) en a, alors $\dfrac{f(x) - f(x)}{x - a}$ tend vers ℓ quand x tend vers a.

En particulier, si ℓ est finie, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

4.6 **Théorème fondamental de l'analyse**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors $\mathrm{F} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f s'annulant en a.

4.7 **Formule de Taylor avec reste intégral**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2, \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

4.8 **Inégalité de Taylor-Lagrange**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On **suppose qu'il exsite** une constante M telle que $\forall x \in \mathrm{I}, \left|f^{(n+1)}\right| \leqslant \mathrm{M}$. Alors

$$\forall x \in \mathrm{I}, \left| f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) + - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right| \leqslant \frac{\mathrm{M}.\,|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

4.9 **Formule de Taylor-Young**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$$

$$\forall h \ tq\ a+h \in \mathrm{I},\ f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o\big(h^n\big)$$

4.10 **Sommes de Riemann**

Soit $f : [\,a\,;\; b] \to \mathbb{R}$. Soit $f : [\,a\,;\; b] \to \mathbb{R}$.

Soit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{n=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ et $\mathrm{S}_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{n=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$

Si f est continue sur $[a\,;\,b]$, alors :

$$s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

4.11 **Convexité**

① f est convexe sur I si
$\forall (x,y)\in \mathrm{I}^2, \forall \lambda \in [0\,;\,1], f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$

② Si f est convexe, alors $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de ses tangentes et en dessous de ses cordes.

③ Si f est deux fois dérivable, alors f est convexe si, et seulement si, $f'' \geqslant 0$.

5 Équations différentielles

1. **Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1**

Soit $a, b : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continues.

$$(\mathcal{E})\ y' + a(t)y = b(t),$$
$$(\mathcal{E}_0)\ y' + a(t)y = 0.$$

Résolution de l'équation homogène

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_\prime)$ est

$$\mathrm{E}_0 = \{t \mapsto k\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}, k \in \mathbb{K}\} = \mathrm{Vect}\big(t \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}\big)$$

où A désigne une primitive de a sur I.

☞ Si on ne sait pas expliciter A (i.e primitiver a), on peut écrire en vertu du théorème fondamental de l'analyse

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ t \mapsto k \exp\left(-\int_{t_0}^t a(t)\mathrm{d}u \right), k \in \mathbb{K} \right\}$$

2. **Solutions de l'équation avec second membre - Principe de superposition**

Soit $z : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$. Alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est

$$\mathrm{E} = \{y + z, y \text{ solution de } (\mathcal{E})\}.$$

3. **Recherche d'une solution particulière par la méthode de la « variation de la c**

On cherche une solution $z : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ de la forme

$$z(t) = k(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}.$$

☞ Si on ne se trompe, les « $k(t)$ » se simplifient et on doit obtenir

$$k'(t) = b(t)\exp\left(\int_{t_0}^t a(t)\mathrm{d}u \right)$$

Il reste à primitiver pour obtenir une solution.

4. **Théorème de Cauchy linéaire**

Soit $a, b : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continues, $t_0 \in \mathrm{I}$, $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

5. Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $c : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continue.

$$(\mathcal{E})\ y'' + ay' + by = c(t),$$
$$(\mathcal{E}_0)\ y'' + ay' + by = 0.$$

L'équation caractéristique associé à $(\mathcal{E}_0)$ est

$$(\mathcal{EC})\ z^2 + az + b = 0.$$

Soit $\Delta = a^2 - 4b$ son discriminant.

Résolution dans $\mathbb{C}$

- Si $\Delta \neq 0$, soit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ les solutions de $(\mathcal{EC})$.
$$\begin{aligned} \mathrm{E}_0 &= \{t \mapsto c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}\big(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\big). \end{aligned}$$
- Si $\Delta = 0$, soit λ la solution de $(\mathcal{EC})$.
$$\begin{aligned} \mathrm{E}_0 &= \{t \mapsto (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{\lambda t}, (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}\big(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}, t \mapsto t\mathrm{e}^{\lambda t}\big). \end{aligned}$$

Résolution dans $\mathbb{R}$

- Si $\Delta > 0$, soit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ les solutions de $(\mathcal{EC})$.
$$\begin{aligned} \mathrm{E}_0 &= \{t \mapsto c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}\big(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\big). \end{aligned}$$
- Si $\Delta = 0$, soit λ la solution de $(\mathcal{EC})$.
$$\begin{aligned} \mathrm{E}_0 &= \{t \mapsto (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{\lambda t}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}\big(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}, t \mapsto t\mathrm{e}^{\lambda t}\big). \end{aligned}$$
- Si $\Delta < 0$, soit $\lambda = a \pm ib$ une solution de $(\mathcal{EC})$.
$$\begin{aligned} \mathrm{E}_0 &= \{t \mapsto (c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt))\mathrm{e}^{at}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}\big(t \mapsto \cos(bt)\mathrm{e}^{at}, t \mapsto \sin(bt)\mathrm{e}^{at}\big). \end{aligned}$$

6. Solutions de l'équation avec second membre - Principe de superposition

Soit $z : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$. Alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est

$$\mathrm{E} = \{y + z, y \text{ solution de } (\mathcal{E})\}.$$

7. Seconds membres particuliers

☞ **Second membre** $c : t \mapsto \mathrm{A}\mathrm{e}^{\lambda t}$ avec $\mathrm{A} \in \mathbb{K}$.

- Si λ non racine de $(\mathcal{EC})$, on cherche une solution du type $t \mapsto \mathrm{B}\mathrm{e}^{\lambda t}$.
- Si λ racine simple de $(\mathcal{EC})$, on cherche une solution du type $t \mapsto \mathrm{B}t\mathrm{e}^{\lambda t}$.
- Si λ racine double de $(\mathcal{EC})$, on cherche une solution du type $t \mapsto t^2\mathrm{e}^{\lambda t}$.

☞ **Second membre** $c : t \mapsto \mathrm{A}\cos(\omega t)$ **ou** $c : t \mapsto \mathrm{A}\sin(\omega t)$

On suppose ni $i\omega$ ni $-i\omega$ solutions de $(\mathcal{EC})$.

Alors il existe (λ, μ) tel que $t \mapsto \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)$ soit solution de $(\mathcal{E})$.

8. Théorème de Cauchy linéaire

Soit $a, b, c : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continues, $t_0 \in \mathrm{I}$, $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$. Le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.