

1 Séries numériques

1.1 • *Série Géométrique* - $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$.

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

• *Série de Riemann* - $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

• *Série exponentielle* - $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout x de $\mathbb{R}$. Sa somme est $\exp(x)$.

1.2 Divergence grossière

Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si u_n ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ diverge grossièrement.

1.3 Série des différences

La série $\sum_{n \geq n_0} (u_{n+1} - u_n)$ converge si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge.

1.4 Critère de D'Alembert

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite ne s'annulant pas.

• Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ avec $\ell \in [0; 1[$, alors la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge absolument.

• Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ avec $\ell \in]1; +\infty]$, alors la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ diverge grossièrement.

1.5 Absolue convergence

Si la série $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ converge, alors la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

Dans ce cas, on dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est **absolument convergente**.

Remarque : lorsqu'elles convergent, les séries de référence du premier point sont absolument convergentes.

1.6 Critères de convergence

• *Comparaison* - Si $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq v_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge (absolument).

• *Domination, négligeabilité* - Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ (en particulier si $u_n = o(v_n)$) et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ est **absolument** convergente alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge (absolument).

• *Équivalence* - Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ avec v_n de signe constant au voisinage de $+\infty$ alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont de même nature.

1.7 Théorème spécial des séries alternées (Leibniz)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Alors :

• $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n u_n$ converge, ainsi que $\sum_{n \geq n_0} (-1)^{n+1} u_n$,

• $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est du signe de $(-1)^{N+1} u_{N+1}$ (i.e. de son premier terme),

• on a la majoration : $|R_N| \leq u_{N+1}$.

1.8 Formule de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

1.9 Constante γ d'Euler - Hors programme mais utile

$\exists \gamma \in \mathbb{R}$ telle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$. En conséquence, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

1.10 Produit de Cauchy

① Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries numériques. Le produit de Cauchy de ces

séries est la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ où : $\forall n \geq 0, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

② Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent absolument, alors leur produit de

Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$.