1 Séries numériques

1.1 • *Série Géométrique* - $\sum_{n\geq 0} q^n$ converge si, et seulement si, $|q|<1$.

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

• *Série de Riemann* - $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

• *Série exponentielle* - $\sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge pour tout x de $\mathbb{R}$. Sa somme est $\exp(x)$.

1.2 **Divergence grossière**

Si $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si u_n ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge *grossièrement.*

1.3 **Série des différences**

La série $\sum_{n\geqslant n_0} \left(u_{n+1}-u_n\right)$ converge si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge.

1.4 **Critère de D'Alembert**

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite ne s'annulant pas.

• Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell \in [\,0\,;\,1[$, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge absolument.

• Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell \in]\,1\,;\,+\infty]$, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge grossièrement.

1.5 **Absolue convergence**

Si la série $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$ converge, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.

Dans ce cas, on dit que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est **absolument convergente**.

Remarque : lorsqu'elles convergent, les séries de référence du premier point sont absolument convergente.

1.6 **Critères de convergence**

•*Comparaison* - Si $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq v_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge (absolument).

•*Domination, négligeabilité* - Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ (en particulier si $u_n = o(v_n)$) et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ est **absolument** convergente alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge (absolument).

•*Équivalence* - Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ avec v_n de signe constant au voisinage de $+\infty$ alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ sont de même nature.

1.7 **Théorème spécial des séries alternées (Leibniz)**

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Alors :

• $\sum_{n\geq n_0} (-1)^n u_n$ converge, ainsi que $\sum_{n\geq n_0} (-1)^{n+1} u_n$,

• $\mathrm{R_N} = \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est du signe de $(-1)^{\mathrm{N}+1} u_{\mathrm{N}+1}$ (*i.e.* de son premier terme),

• on a la majoration : $|\mathrm{R_N}| \leq u_{\mathrm{N}+1}$.

1.8 **Formule de Stirling**

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n \mathrm{e}^{-n}$$

1.9 **Constante γ d'Euler - Hors programme mais utile**

$\exists \gamma \in \mathbb{R}$ telle que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$. En conséquence, $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

1.10 **Produit de Cauchy**

① Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries numériques. Le produit de Cauchy de ces séries est la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ où : $\forall n \geq 0, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

② Si les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergent absolument, alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.