

Exercice 1 Cas des termes généraux décroissants

1. a) Proposer explicite une minoration de $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$ à l'aide d'une comparaison avec une intégrale.
- b) Montrer finalement que la série de terme général $\frac{1}{n \ln(n)}$ diverge.
2. Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite *décroissante* telle que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

On pose : $\forall n \geq n_0, \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

- a) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_n)$?
- b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nu_{2n}$.
- c) Montrer que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.
3. Vrai ou faux ?
- Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite *décroissante*.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
- a) Si $\sum_n u_n$ converge, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.
- b) Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum_n u_n$ converge.
- c) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est-elle convergente ?
- d) A-t-on $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$?
- e) Commentaire ? À relier aux questions précédentes...

Solution (Ex.1 – Cas des termes généraux décroissants)

1. a) Soit $n \geq 2$. $\forall t \in [n; n+1]$, $\frac{1}{n \ln(n)} \geq \frac{1}{t \ln(t)}$ car $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ est décroissante comme inverse de la fonction croissante $t \mapsto t \ln(t)$.
Par croissance de l'intégrale, on a : $\frac{1}{n \ln(n)} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt$.

En sommant les inégalités précédentes :

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \geq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt, \text{ et par la relation de Chasles :}$$

$$S_n \geq \int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt.$$

b) Comme

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt = [\ln |\ln(t)|]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \text{ la}$$

série de terme général $\frac{1}{n \ln(n)}$ diverge par minoration.

2. a) Comme la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, la suite (S_n) converge, vers une limite S .
Alors : $S_{2n} - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0$ car (S_{2n}) est une suite extraite de (S_n) .

- b) Or : $\forall n \geq 1, \quad S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq nu_{2n}$ (n termes tous $\geq u_{2n}$ car u décroît).

Et comme la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, u tend vers 0. Étant de plus décroissante, u est une suite positive.

Ainsi : $\forall n \geq 1, \quad 0 \leq nu_{2n} \leq S_{2n} - S_n$.

Par encadrement, $nu_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $2nu_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- c) $\forall n \geq 1, 0 \leq u_{2n+1} \leq u_{2n}$ donc $0 \leq 2nu_{2n+1} \leq 2nu_{2n}$, et par encadrement, $2nu_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Comme de plus $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $(2n+1)u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Les deux suites $(2nu_{2n})$ et $((2n+1)u_{2n+1})$ convergent vers la même limite. Ainsi, $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, autrement dit :

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. a) Vrai : c'est ce que démontre la question 2.

- b) Faux : la question 1. fournit un contre-exemple car $\frac{1}{n \ln(n)} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et

$$\sum_n \frac{1}{n \ln(n)} \text{ diverge.}$$

4. a) Vrai : comme la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ décroît et tend vers 0, la série converge par application du théorème de Leibniz.

b) $n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n \sqrt{n}$ diverge, donc ne tend pas vers 0, donc on n'a pas $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

En fait, $\left| \frac{1/n}{(-1)^n/\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

c) Sans l'hypothèse de décroissance, 3.a) devient faux : une série peut converger sans que son terme général soit négligeable devant $\frac{1}{n}$.

En particulier, si une suite est alternée, alors elle n'est pas décroissante, donc les séries alternées peuvent converger sans que leur terme général soit négligeable devant $\frac{1}{n}$.

Exercice 2 Comparaison série-intégrale

Soit $a \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence $S(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$ et à l'aide d'une comparaison série-intégrale calculer $\lim_{a \rightarrow +\infty} S(a)$. Que dire de $\lim_{a \rightarrow -\infty} S(a)$?

Solution (Ex.2 – Comparaison série-intégrale)

Je pose pour tout $n \geq 1$ $u_n = \frac{a}{n^2 + a^2}$.

- Si $a = 0$, $S(a)$ est la somme de la série nulle, qui existe et vaut 0.
- Si $a \neq 0$, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{n^2}$ et $\sum u_n$ converge par équivalence de termes généraux positifs et convergence de la série de Riemann de paramètre 2.

Je suppose désormais $a > 0$

- Par décroissance de la fonction, continue sur $[0; +\infty[$, $f : x \mapsto \frac{a}{x^2 + a^2}$, on a pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x) dx,$$

et comme $u_n = f(n)$, en sommant pour n de 1 à N ,

$$\int_1^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^N u_n \leq \int_0^N f(x) dx.$$

Or $\int_\alpha^\beta f(x) dx = \int_\alpha^\beta \frac{1/a}{(x/a)^2 + 1} dx = \text{Arctan}\left(\frac{\beta}{a}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{\alpha}{a}\right)$
Ainsi

$$\text{Arctan}\left(\frac{N+1}{a}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \leq \sum_{n=1}^N u_n \leq \text{Arctan}\left(\frac{N}{a}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{0}{a}\right).$$

Puisque toutes les quantités présentes convergent, en passant à la limite lorsque N tend vers $+\infty$,

$$\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \leq S(a) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Et par encadrement, puisque $\text{Arctan}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, $\lim_{a \rightarrow +\infty} S(a) = \frac{\pi}{2}$.

- Par linéarité de la somme, pour tout a de $\mathbb{R}$, $S(-a) = -S(a)$ donc S est impaire et $\lim_{a \rightarrow -\infty} S(a) = -\lim_{a \rightarrow +\infty} S(a) = -\frac{\pi}{2}$.