

Exercice 1 *Pairs et impairs*

1. a) Justifier la convergence des séries

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2}.$$

b) En admettant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer les sommes des séries précédentes.

2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} > \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Solution (Ex.1 – Pairs et impairs)

1. a) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge par application du théorème spécial des séries alternées.

$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n)^2}$ converge par linéarité car la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2$ converge.

$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge par le critère des équivalents de t.g. positifs : $\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ et convergence de la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2$.

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

$$\text{d'où } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Remarque : la somme de cette dernière série alternée est bien du signe de son premier terme.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\forall k \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{(x^2)^k}{k!}$ assure la convergence de $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ par comparaison à la série exponentielle de paramètre x^2 .

Une comparaison analogue justifie la convergence de $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, donc de

$$\sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ par linéarité.}$$

Attention si on utilise un autre critère : x^{2k+1} est de signe alternant pour $x < 0$.

$$\text{Enfin } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = \exp(-x) > 0.$$

Exercice 2 *Convergences et sommes*

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et déterminer sa somme.

2. On s'intéresse maintenant à la série de terme général

$$v_n = \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$$

a) Justifier que la série $\sum_n v_n$ converge.

b) Déterminer trois réels a , b et c tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{a}{n^2} + \frac{b}{(n+1)^2} + \frac{c}{n(n+1)}.$$

c) On donne : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Solution (Ex.2 – Convergences et sommes)

$$1. \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Tout marche pour prouver la convergence : majoration, équivalence, domination du terme général par $1/n^2$, mais **soyons directs** : la série de terme général $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

converge car la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge...

Par télescopage, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$

2. a) Par domination par le terme général de la série de Riemann de paramètre $\alpha = 4$, $\sum_n v_n$ converge.

b) **Soyons directs**, en élevant la décomposition en éléments simples de 1., on trouve directement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{-2}{n(n+1)}.$$

c) Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{\pi^2}{6} + \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) - 2 \times 1 = \frac{\pi^2}{3} - 3.$$

Exercice 3 Autour du logarithme

Existence et valeur de $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$.

Solution (Ex.3 – Autour du logarithme)

L'existence peut être obtenue via l'équivalence $\ln(1 - 1/n^2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1/n^2$ et la convergence de la série de Riemann de paramètre 2. Mais on peut faire d'une pierre deux coups en cherchant la somme.

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) &= \sum_{n=2}^N \ln \left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \right) = \\ \sum_{n=2}^N [\ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln(n)] &= \sum_{n=1}^{N-1} \ln(n) + \sum_{n=3}^{N+1} \ln(n) - 2 \sum_{n=2}^N \ln(n) = \\ \ln(1) + \ln(2) + \ln(N) + \ln(N+1) - 2\ln(2) - 2\ln(N) &= \ln \frac{N+1}{2N} \end{aligned}$$

Donc la série converge et $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = -\ln 2$.

Remarque : termes strictement négatifs... somme strictement négative...

Exercice 4 Traitement d'une série alternée un peu récalcitrante...

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n - (-1)^n}$.

1. a) La suite $(|u_n|)$ est-elle convergente de limite nulle ? Est-elle décroissante ?
b) Le théorème des séries alternées s'applique-t-il ?

2. a) Donner un équivalent simple v_n de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
b) Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

3. *Au-delà de l'équivalent...*

Donner un équivalent de $w_n = u_n - v_n$ (ce qu'il reste de u_n lorsqu'on lui retire son équivalent...) et en déduire la nature de $\sum u_n$.

4. *... ou par un développement*

À l'aide du développement de $(1+x)^{-1}$ lorsque x tend vers 0, montrer que $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et retrouver la nature de $\sum u_n$.

5. *En passant par la parité*

On pose, pour tout $n \geq 1$, $v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

a) Expliciter v_n et en déduire la convergence de la suite (S_{2n}) .

b) En déduire la nature de $\sum u_n$.

6. Étudier les stratégies précédentes pour la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$.

Solution (Ex.4 – Traitement d'une série alternée un peu récalcitrante...)

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n - (-1)^n}$.

1. • $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: $(|u_n|)$ est convergente de limite nulle.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{2n-1}| - |u_{2n}| = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-1} < 0$ donc la suite $(|u_n|)$ n'est pas décroissante.

• Le théorème des séries alternées ne s'applique pas.

2. $v_n = \frac{(-1)^n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$. Bien que $\sum v_n$ converge, on ne peut pas conclure puisque le signe des termes généraux n'est pas constant.

3. *Au-delà de l'équivalent...*

$$w_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n - (-1)^n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{(n - (-1)^n)n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Ainsi $u_n = v_n + w_n$ avec $\sum v_n$ et $\sum w_n$ qui convergent. Par conséquent, $\sum u_n$ converge. OUF !

$$4. \dots \text{ ou par un développement } u_n = \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{1 - (-1)^n/n} \right) = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi on peut écrire $u_n = v_n + w_n$ avec $\sum v_n$ et $\sum w_n$ qui convergent. Par conséquent, $\sum u_n$ converge. RE-OUF!

$$5. a) x_n = \frac{-1}{2n} + \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2n(2n-1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$$

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^n x_k \text{ or } \sum_n x_n \text{ converge, donc } (S_{2n}) \text{ converge.}$$

$$b) \text{ Soit } S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}. \text{ On a } S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S + 0 = S$$

Comme (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent, vers la même limite S , (S_n) converge vers S . Autrement dit $\sum u_n$ converge.

$$6. u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n},$$

$$\bullet |u_{2n-1}| - |u_{2n}| = \frac{1}{\sqrt{2n-1}+1} - \frac{1}{\sqrt{2n-1}} = \frac{\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-1} - 2}{\dots} \text{ or } \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2n} + \sqrt{2n-1}} < 1 \text{ donc } |u_{2n-1}| - |u_{2n}| < 0 \text{ et la suite } (|u_n|) \text{ n'est pas décroissante...}$$

$$\bullet u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ qui n'est pas de signe constant...}$$

$$\bullet w_n = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n} - (-1)^n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{(\sqrt{n} - (-1)^n)\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Ainsi $u_n = v_n + w_n$ avec $\sum v_n$ qui converge et $\sum w_n$ qui diverge. Par conséquent, $\sum u_n$ diverge. OUF!

$$\bullet u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = v_n + a_n + b_n \text{ avec } \sum v_n \text{ et } \sum b_n \text{ qui converge tandis que } \sum a_n \text{ diverge : } \sum u_n \text{ diverge.}$$

$$\bullet \text{ Avec } x_n = u_{2n-1} + u_{2n} \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

$$x_n = -\frac{1}{\sqrt{2n-1}+1} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} = \frac{N_n}{D_n} \text{ où } D_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n \text{ et } N_n = 2 - \sqrt{2n} + \sqrt{2n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \text{ puisque } \sqrt{2n} - \sqrt{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2n} + \sqrt{2n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ (ce qui est conforme au développement précédent, soit dit en passant).

Donc $S_{2n} = \sum_{k=1}^n x_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et la série $\sum n + u_n$ diverge...

Exercice 5 Natures en série

Soit, pour tout $n \geq 2$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer la nature de la série de terme général u_n .
2. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln(1 + u_n)$.
3. Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(u_n)$.
4. Déterminer la nature de la série de terme général $\cos(u_n)$.

Solution (Ex.5 - Natures en série)

1. $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est une suite décroissante de limite nulle donc $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge par le critère des séries alternées.

$$2. \text{ Comme } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \ln(1 + u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + \mathcal{O}(u_n^3) = u_n - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Or $\sum_n u_n$ par 1., et $\sum_n \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergent car la série de Riemann de paramètre $3/2 > 1$ converge. De plus la série harmonique $\sum_n \frac{1}{2n}$ diverge.

Donc $\sum_n \ln(1 + u_n)$ diverge.

$$3. \text{ Comme } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \sin(u_n) = u_n + \mathcal{O}(u_n^3) = u_n + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Or $\sum_n u_n$ par 1., et $\sum_n \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergent car la série de Riemann de paramètre $3/2 > 1$ converge. Donc par linéarité $\sum_n \ln(1 + u_n)$ converge.

$$4. \text{ Comme } \cos(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0, \sum_n \cos(u_n) \text{ diverge grossièrement.}$$

Exercice 6 Fonction ζ de Riemann en 1

Pour tout $\alpha > 1$ on pose

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

1. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \zeta(\alpha)$.
2. Donner un équivalent de ζ en 1.

Solution (Ex.6 – Fonction ζ de Riemann en 1)

1. Par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.
Donc : $\frac{1}{\alpha-1} \leq \zeta(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$.
Par comparaison, $\lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \zeta(\alpha) = +\infty$.
La majoration n'était pas nécessaire mais sera utile pour la suite.
2. Et : $\forall \alpha > 1, 1 \leq \frac{\zeta(\alpha)}{1/(\alpha-1)} \leq (\alpha-1) + 1$, donc par encadrement : $\frac{\zeta(\alpha)}{1/(\alpha-1)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1^+} 1$, et

$$\zeta(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}.$$

Exercice 7 Avec ou sans la formule de Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

1. Dans cette première question, on s'interdit d'utiliser la formule de Stirling.
 - a) Déterminer un équivalent de $\ln u_{n+1} - \ln u_n$.
 - b) En déduire que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
 - c) En s'intéressant à la série de terme général $\ln((n+1)u_{n+1}) - \ln((n)u_n)$, montrer que $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.
 - d) Soit $v_n = \sqrt{n}u_n$.
En s'intéressant à la série de terme général $\ln v_{n+1} - \ln v_n$, montrer que la suite $(\sqrt{n}u_n)$ converge vers une limite strictement positive.
2. Retrouver les résultats précédents à l'aide de la formule de Stirling.

Solution (Ex.7 – Avec ou sans la formule de Stirling)

1. Dans cette première question, on s'interdit d'utiliser la formule de Stirling.
 - a) $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \frac{(2n+1)(2n+2)}{2^2(n+1)^2} = \ln \frac{2n+1}{2n+2} = \ln \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right)$
 $\ln u_{n+1} - \ln u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.
 - b) La série $\sum_{n \geq 0} (\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ tend vers $-\infty$, donc $\ln u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$, donc $u_n = e^{\ln u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
 - c) $\ln((n+1)u_{n+1}) - \ln((n)u_n) = \ln \frac{2n+1}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ donc la série $\sum_{n \geq 0} \ln((n+1)u_{n+1}) - \ln((n)u_n)$ diverge vers $+\infty$, donc $\ln(nu_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $nu_n = e^{\ln(nu_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
Comme $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, nu_n \geq 1$ i.e. $u_n \geq \frac{1}{n}$:
 $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge par comparaison de termes généraux positifs.
 - d) $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln u_{n+1} - \ln u_n$,
or $\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\ln u_{n+1} - \ln u_n = -\frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$,
donc $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série de terme général $\ln v_{n+1} - \ln v_n$ converge.
On en déduit que $(\ln v_n)$ converge, vers une limite $c \in \mathbb{R}$. Donc $v_n = e^{\ln v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell = e^c > 0$. Cela signifie au passage que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{\sqrt{n}}$.
2. $u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n} e^{2n}}{e^{2n} 2^{2n} (2\pi n)^{n^2} n^{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ ce qui permet de retrouver tous les résultats précédents... et même plus : $\ell = 1/\sqrt{\pi}$.

Exercice 8 Exemples de Séries de Bertrand

Soit $\alpha \in]0; +\infty[$.

1. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n \ln^\alpha n}$.
2. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln n}$.

Solution (Ex.8 – Exemples de Séries de Bertrand)

1. $f_\alpha : t \mapsto \frac{1}{t \ln^\alpha t}$ est continue positive et décroissante sur $[2; +\infty[$ donc $\sum_{n \geq 2} u_n$ est

de même nature que $\int_2^{+\infty} f_\alpha(t) dt$.

• Si $\alpha = 1$, $\int_2^x f_1(t) dt = [\ln |\ln(t)|]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \dots \sum_{n \geq 2} u_n$

diverge.

• Si $\alpha \neq 1$,

$$\int_2^x f_\alpha(t) dt = \left[\frac{1}{(1-\alpha) \ln^{\alpha-1}(t)} \right]_2^x$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha) \ln^{\alpha-1}(x)} - \frac{1}{(1-\alpha) \ln^{\alpha-1}(2)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{(\alpha-1) \ln^{\alpha-1}(2)} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Donc $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

• Bilan : $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2. $f_\alpha : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \ln t}$ est continue positive et décroissante sur $[2; +\infty[$ donc $\sum_{n \geq 2} u_n$ est

de même nature que $\int_2^{+\infty} f_\alpha(t) dt$.

• si $\alpha > 1$, $f_\alpha(t) = o(1/t^\alpha)$ et $t \mapsto 1/t^\alpha$ est intégrable ... $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

• si $\alpha = 1$, $\int_2^x f_1(t) dt = [\ln |\ln(t)|]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \dots \sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

• si $\alpha < 1$, $f_\alpha(t) \geq f_1(t) \geq 0$ car $t^\alpha \leq t$, or $\int_2^{+\infty} f_1(t) dt$ diverge d'après le point précédent donc $\int_2^{+\infty} f_\alpha(t) dt$ diverge ... $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

Exercice 9 Somme et reste de la série exponentielle

On ne suppose pas connues les propriétés de la série exponentielle. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{x^n}{n!}$, et $\forall N \in \mathbb{N}, S_N = \sum_{n=0}^N u_n$.

1. Dans cette question, $x = 1$, et on pose : $\forall N \in \mathbb{N}^*, T_N = S_N + \frac{1}{N \times (N!)}$.

a) Montrer que les suites S et T sont convergentes, de même limite.

b) On pose de plus : $\forall N \in \mathbb{N}, R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$.

Justifier que : $\forall N \in \mathbb{N}^*, |R_N| \leq \frac{1}{N.N!}$

2. a) On revient au cas général. À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge en précisant sa somme.

Proposer une majoration du reste R_N de cette série.

b) Dans le cas $x = 1$, comparer cette majoration à celle obtenue précédemment.

Solution (Ex.9 – Somme et reste de la série exponentielle)

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{x^n}{n!}, \text{ et } \forall N \in \mathbb{N}, S_N = \sum_{n=0}^N u_n.$$

1. a) $S_{N+1} - S_N = \frac{1}{(N+1)!} > 0$,

$$T_{N+1} - T_N = \frac{1}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+1)(N+1)!} - \frac{1}{N.N!} = \frac{N(N+1) + N - (N+1)^2}{N(N+1)(N+1)!}$$

$$T_{N+1} - T_N = \frac{-1}{N(N+1)(N+1)!} < 0,$$

$$T_N - S_N = \frac{1}{N.N!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0,$$

donc S et T sont adjacentes, donc convergentes, vers une même limite.

b) Notons ℓ la limite commune de S et T (en fait, la suite de l'exercice montrera que $\ell = e$). Comme S et T sont deux suites respectivement croissante et décroissante de limite ℓ ,

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, S_N \leq \ell \leq T_N, \text{ donc } \forall N \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \ell - S_N \leq \frac{1}{N.N!},$$

$$\text{et comme } R_N = S_N - \ell, \text{ on a bien : } \forall N \in \mathbb{N}^*, |R_N| \leq \frac{1}{N.N!}$$

2. a) On revient au cas général. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge en précisant sa somme.

• Supposons $x \in \mathbb{R}^+$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à exp qui est $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^{N+1}$ sur $[0; x]$,

$$\exp(x) = S_N + \int_0^x \frac{e^t}{N!} (x-t)^N dt$$

$$\left| \int_0^x \frac{e^t}{N!} (x-t)^N dt \right| \leq \frac{e^x}{N!} \int_0^x (x-t)^N dt \leq \frac{e^x}{N!} \times \frac{x^{N+1}}{N+1} \leq \frac{e^x x^{N+1}}{(N+1)!}$$

Or $x^N = o(N!)$, donc par domination $\int_0^x \frac{e^t}{N!} (x-t)^N dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

Par conséquent, $S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \exp(x)$: la série converge, sa somme est e^x .

• Supposons $x \in]-\infty; 0]$. L'application de la formule de Taylor sur $[x; 0]$ donne encore :

$$\exp(x) = S_N + \int_0^x \frac{e^t}{N!} (x-t)^N dt,$$

mais la majoration du reste intégral change :

$$\left| \int_0^x \frac{e^t}{N!} (x-t)^N dt \right| \leq \frac{1}{N!} \int_x^0 |e^t (x-t)^N| dt \leq \frac{1}{N!} \int_x^0 (t-x)^N dt$$

$$\left| \int_0^x \frac{e^t}{N!} (x-t)^N dt \right| \leq \frac{(-x)^{N+1}}{(N+1)!}$$

On conclut comme pour $x \geq 0$.

• Pour majorer le reste, on peut écrire en toute généralité :

$$R_N \leq \frac{e^{\max(0,x)} |x|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

b) Dans le cas $x = 1$, cette dernière majoration donne $|R_N| \leq \frac{e}{(N+1)!}$.

Ce majorant n'est pas meilleur que celui de la première question :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{e}{N+1} - \frac{1}{N} = \frac{eN - N - 1}{N(N+1)} = \frac{(e-1)N - 1}{N(N+1)} > 0,$$

$$\text{donc : } \frac{1}{N \cdot N!} \leq \frac{e}{(N+1)!}.$$

Exercice 10 Une condition nécessaire pour les t.g. décroissants 0

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante telle que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

$$\text{On pose : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

a) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} - S_n$? En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nu_{2n}$.

b) Montrer que : $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}^*, n = k^2, \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas un carré.} \end{cases}$

Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

A-t-on $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$?

Solution (Ex.10 – Une condition nécessaire pour les t.g. décroissants)

1. a) Comme la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, la suite (S_n) converge, vers une limite S . Alors :

$$S_{2n} - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0.$$

$$\text{Or : } \forall n \geq 1, \quad S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq nu_{2n} \text{ car } u \text{ décroît.}$$

Et comme la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, u tend vers 0. Étant de plus décroissante, u

est une suite positive. Ainsi : $\forall n \geq 1, \quad 0 \leq nu_{2n} \leq S_{2n} - S_n$.

Par encadrement, $nu_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $2nu_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

b) $\forall n \geq 1, 0 \leq u_{2n+1} \leq u_{2n}$ donc $0 \leq 2nu_{2n+1} \leq 2nu_{2n}$, et par encadrement, $2nu_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Comme de plus $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $(2n+1)u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, autrement dit : $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. $\forall N \geq 1, \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \frac{1}{k^2}$. Comme la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (k^2)u_{k^2} = 1$, ce qui exclut que $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On n'a pas : $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 11 Nature

Soit $\forall n \geq 0, \quad u_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$. Nature de $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Solution (Ex.11 – Nature)

$\frac{1}{n} \ln n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\sqrt[n]{n} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: par définition de la limite, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq$

$N, |\sqrt[n]{n} - 1| \leq \frac{1}{2}$.

Ainsi : $\forall n \geq N, |u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Comme $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente, par comparaison $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Exercice 12 Ça finira par converger

Soit $\forall n \geq 1, u_n = \frac{n - |\cos n|}{n + |\sin n|}$.

Nature de $\sum_{n \geq 0} u_n$, de $\sum_{n \geq 1} (u_n - 1)$ et de $\sum_{n \geq 1} (u_n - 1)^2$.

Solution (Ex.12 – Ça finira par converger)

$n - |\cos n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$, $n + |\sin n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge grossièrement.

$$u_n - 1 = \frac{-|\cos n| - |\sin n|}{n + |\sin n|} = -\frac{|\cos n| + |\sin n|}{n + |\sin n|}.$$

De $|\cos n| \leq 1$ et $|\sin n| \leq 1$ je tire $|\cos n| + |\sin n| \geq \cos^2 n + \sin^2 n \geq 1$, donc $\frac{|\cos n| + |\sin n|}{n + |\sin n|} \geq \frac{1}{n + 1}$.

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + 1}$ diverge, par comparaison $\sum_{n \geq 1} \frac{|\cos n| + |\sin n|}{n + |\sin n|}$ diverge et par linéarité $\sum_{n \geq 1} (u_n - 1)$ diverge.

$$(u_n - 1)^2 = \left(\frac{-|\cos n| - |\sin n|}{n + |\sin n|} \right)^2$$

$n + |\sin n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ car $\sin n = o(n)$, donc $(n + |\sin n|)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$. Et comme

$(-|\cos n| - |\sin n|)^2 \leq 2$, $(u_n - 1)^2 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_{n \geq 1} (u_n - 1)^2$ converge (absolument).

Exercice 13 Leibniz : positive de limite nulle ne suffit pas

Soit : $\forall n \geq 1, u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} u_n$, puis de $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$.

Solution (Ex.13 – Leibniz : positive de limite nulle ne suffit pas)

• Soit $H_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$.

$$\sum_{n=1}^{2N} u_n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2k} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{2} H_N + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2k-1)^2} \geq \frac{1}{2} H_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty \text{ donc } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ diverge.}$$

•

Le théorème de Leibniz ne s'applique pas directement car la suite n'est pas monotone.

$$\sum_{n=1}^N (-1)^n u_n = \sum_{k=1}^{[N/2]} \frac{1}{2k} - \sum_{n=0}^{[(N-1)/2]} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Or la première somme diverge vers $+\infty$ car la série harmonique diverge, la seconde domination par la série de Riemann de paramètre 2 converge car $\frac{1}{(2k+1)^2} =$

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Donc $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$ diverge... bien que u soit positive de limite nulle...