

Exercice 1 Une décomposition en éléments simples ULTRA-FRÉQUENTE

... au point que, dans un énoncé, on ne vous indiquera pas qu'il faut s'en servir.

Dans ce qui suit, la variable z pourra prendre toute valeur telle qu'aucun des dénominateurs apparaissant ne soit nul.

1. a) Déterminer a et b réels tels que

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z+1}.$$

- b) En déduire la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(z-1)z}$.

2. Plus généralement, α étant une constante complexe, donner la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{z(z+\alpha)}$.

Solution (Ex.1 – Une décomposition en éléments simples ULTRA-FRÉQUENTE)

1. a) $\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}.$

b) $\frac{1}{(z-1)z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}.$

2. $\frac{1}{z(z+\alpha)} = \frac{1/\alpha}{z} - \frac{1/\alpha}{z+\alpha}.$

Exercice 2 Quelques télescopes

$(u_n)_n$ étant une suite réelle, on désigne par S_n la somme partielle d'ordre n de la série de terme général u_n . Dans les cas suivants, expliciter S_n en fonction de n , étudier si la série de terme général u_n converge et donner sa somme en cas de convergence.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)};$

2. $\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{1}{n^2-1};$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right);$

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}};$

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}};$

6. $\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$

Solution (Ex.2 – Quelques télescopes)

1. $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1;$

2. $u_n = \frac{1}{(n-1)((n-1)+2)} = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)}, S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4};$

3. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n), S_n = \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty;$

4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1;$

5. $u_n = \tan \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n+1}, S_n = \tan(1) - \tan \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tan(1);$

6. $u_n = v_n - v_{n+1}$ où $v_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}, S_n = v_2 - v_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Exercice 3 *Séries de Riemann de paramètre 1 puis 2*

Profitons des premières questions de l'exercice précédent pour retrouver la nature des séries de Riemann

$\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

1. a) Justifier que : $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$.
b) Qu'en conclure ?
2. a) Comparer $\frac{1}{n^2-1}$ et $\frac{1}{n^2}$ et en déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)_n$ converge.
b) Qu'en conclure ?

Solution (Ex.3 – Séries de Riemann de paramètre 1 puis 2)

1. a) $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est concave car $f''(x) < 0$ et $y = x$ est d'équation de la tangente à la courbe de f à l'origine.
b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \geq \ln(n+1)$ donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
La série de Riemann de paramètre 1 diverge.
2. a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2-1} \leq 1 + \frac{3}{4} \leq \frac{7}{4}$ donc la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)_n$ est majorée. Étant croissante, elle converge.
b) La série de Riemann de paramètre 2 converge.

Exercice 4 *Et si on s'intéressait à $\alpha=1/2$?*

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

2. En déduire l'existence d'une constante réelle ρ tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2\sqrt{n} + \rho + o(1).$$

Solution (Ex.4 – Et si on s'intéressait à $\alpha=1/2$?)

1. En multipliant numérateur et dénominateur par les expressions conjuguées :
 - $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}},$
 - $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$
2. Notons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$.
 - $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq 0$ donc u décroît.
 - En sommant les encadrements précédents :
 $2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n}$, d'où $u_n \geq -2$.
 - Ainsi la suite u converge. En notant ρ sa limite, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \rho + o(1)$, donc $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2\sqrt{n} + \rho + o(1)$.

Exercice 5 *Série harmonique et constante gamma d'Euler*

Pour tout x de $[0; +\infty[$, on pose

$$\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2} dt.$$

1. a) Justifier que, pour tout $x \geq 0$,

$$0 \leq \varepsilon(x) \leq x^2.$$

- b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$\varepsilon(x) = x - \ln(1+x).$$

2. H_n désigne le n -ième nombre harmonique défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln(n)$.

- a) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ à l'aide de n et de $\varepsilon(1/n)$.
 b) En déduire que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.
 c) En déduire finalement l'existence d'une constante réelle γ telle que

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

3. a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles a et b (que l'on déterminera) telles que :

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = aH_n - bH_{2n}.$$

- b) En déduire la somme de la série harmonique alternée :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2).$$

Solution (Ex.5 – Série harmonique et constante gamma d'Euler)

1. a) Par croissance de l'intégrale, puisque

$$\forall t \in [0; x], \quad 0 \leq \frac{x-t}{(1+t^2)} \leq x.$$

$$\text{b) } \int_0^x \frac{x-t}{(1+t^2)^2} dt = \left[\frac{-(x-t)}{1+t} \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \ln(1+x)$$

$$\text{2. a) } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(1+1/n) = \frac{1}{n+1} + \varepsilon(1/n) - \frac{1}{n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{n(n+1)} + \varepsilon(1/n)$$

- b) On sait que $\sum \frac{-1}{n(n+1)}$ converge, et comme $0 \leq \varepsilon(1/n) \leq \frac{1}{n^2}$, $\sum \varepsilon(1/n)$ converge.
 Donc la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.

- c) Comme $u_n = u_1 - \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$, u_n admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. Notons γ cette limite.

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \gamma + o(1), \text{ donc } H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

$$\text{3. a) } \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k}}{2k} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} = \frac{1}{2}H_n - \sum_{1 \leq k \leq 2n, k \text{ impair}} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}H_n - \left(H_{2n} - \frac{1}{2}H_n \right) = H_n - H_{2n}$$

- b) On a alors :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma - \ln(2n) - \gamma + o(1) = -\ln(2) + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(2)$$

$$\text{De plus } \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(2), \text{ on a bien } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2).$$

Exercice 6 *Un procédé de sommation dû à Euler*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où

$$u_n = \frac{1}{n(n+1) \dots (n+p)}.$$

On pourra écrire $pu_n = v_n - v_{n+1} \dots$

Solution (Ex.6 – *Un procédé de sommation dû à Euler*)

$$pu_n = \frac{n+p-n}{n(n+1) \dots (n+p)} = \frac{1}{n(n+1) \dots (n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n+p)} = v_n - v_{n+1}, \quad \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n pu_k = \frac{1}{p}(v_1 - v_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p}v_1 = \frac{1}{p.p!}.$$

Exercice 7 *Un exercice d'oral*

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On définit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ en posant

$$u_n = a \ln(n) + b \ln(n+1) + c \ln(n+2).$$

En effectuant un développement de u_n en $\mathcal{O}(1/n^2)$, déterminer pour quelles valeurs de a , b et c la série de terme général u_n converge, et dans ce cas calculer sa somme.

Solution (Ex.7 – *Un exercice d'oral*)

De $\ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$, on tire :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (a+b+c) \ln(n) + b \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + c \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (a+b+c) \ln(n) + \frac{b+2c}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- Si $a+b+c \neq 0$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pm\infty$ et la série diverge grossièrement.
- Si $a+b+c = 0$ et $b+2c \neq 0$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b+2c}{n}$ et la série diverge par le critère des équivalents de signe constant et divergence de la série harmonique.
- Si $a+b+c = 0$ et $b+2c = 0$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série converge par le critère de négligeabilité et convergence de la série de Riemann de paramètre 2. On a alors $c = a$ et $b = -2a$, donc

$$u_n = a(\ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)) = a\left(\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right) \text{ et, par télescopage,}$$

$$\sum_{n=1}^N u_k = a\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right)\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -a \ln(2).$$



Leonhard EULER (1707–1787)