Exercice 1 *Cas des séries à termes positifs*

On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries **à termes positifs et convergentes**.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$, $\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $\mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ et $\mathrm{C}_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$.

On définit par ailleurs des ensembles d'indices :

$$\mathrm{T}_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 | p+q \leqslant n\} \text{ et } \mathrm{Q}_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 | p \leqslant n \text{ et } q \leqslant n\}.$$

1. Justifier que $\mathrm{T}_n \subset \mathrm{Q}_n \subset \mathrm{T}_{2n}$ et représenter ces trois ensembles.

2. Exprimer $\sum_{(p,q)\in \mathrm{T}_n} a_p b_q$, $\sum_{(p,q)\in \mathrm{Q}_n} a_p b_q$ et $\sum_{(p,q)\in \mathrm{T}_{2n}} a_p b_q$ à l'aide des somme A_n, B_n, C_n et C_{2n}.

3. Justifier alors que $\mathrm{C}_n \leqslant \mathrm{A}_n \mathrm{B}_n \leqslant \mathrm{C}_{2n}$ et en déduire que la série $\sum c_n$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

4. *Application* – Soit $q \in \,]\,0\,;\,1[$. En prenant $a_n = b_n = q^n$, existence et valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n$.

Solution (**Ex.1 –** *Cas des séries à termes positifs*)

On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries **à termes positifs et convergentes**.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$, $\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $\mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ et $\mathrm{C}_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$.

On définit par ailleurs des ensembles d'indices :

$$\mathrm{T}_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 | p+q \leqslant n\} \text{ et } \mathrm{Q}_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 | p \leqslant n \text{ et } q \leqslant n\}.$$

1. • $\begin{cases} 0 \leqslant p \\ 0 \leqslant q \\ p+q \leqslant n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant p \leqslant n \\ 0 \leqslant q \leqslant n \end{cases}$ donc $\mathrm{T}_n \subset \mathrm{Q}_n$

• $\begin{cases} 0 \leqslant p \leqslant n \\ 0 \leqslant q \leqslant n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant p \\ 0 \leqslant q \\ p+q \leqslant 2n \end{cases}$ donc $\mathrm{Q}_n \subset \mathrm{T}_{2n}$

• En notant $\mathrm{O} = (0,0)$, $\mathrm{A} = (n,0)$, $\mathrm{A}' = (2n,0)$, $\mathrm{B} = (0,n)$, $\mathrm{B}' = (0,2n)$ et $\mathrm{C} = (n,n)$, T_n contient les points à coorodonnées entières du triangle OAB, Q_n contient les points à coorodonnées entières du carré OACB et T_{2n} contient les points à coorodonnées entières du triangle $\mathrm{OA'B'}$,

2. • *Première méthode pour* T_n

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons que $\sum_{(p,q)\in \mathrm{T}_n} a_p b_q = \mathrm{C}_n$.

D'abord $\mathrm{T}_0 = \{(0,0)\}$ donc $\sum_{(p,q)\in \mathrm{T}_0} a_p b_q = a_0 b_0 = c_0 = \mathrm{C}_0$.

Ensuite soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\sum_{(p,q)\in \mathrm{T}_n} a_p b_q = \mathrm{C}_n$.

Alors $\sum_{(p,q)\in \mathrm{T}_{n+1}} a_p b_q = \sum_{(p,q)\in \mathrm{T}_n} a_p b_q + \sum_{(p,q)\in \mathrm{T}_{n+1}\setminus \mathrm{T}_n} a_p b_q = \mathrm{C}_n + \sum_{p,q \text{ tels que } p+q=n+1} a_p b_q = \mathrm{C}_n + c_{n+1} = \mathrm{C}_{n+1}$
ce qui prouve l'hérédité.

• *Seconde méthode*

Changons de description de T_n : en parcourant les segments d'équation $y = k - x$ pour $k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]$,

$\mathrm{T}_n = \{(i, k-i) | 0 \leqslant k \leqslant n, 0 \leqslant i \leqslant k\}$ et $\sum_{(p,q)\in \mathrm{T}_n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \mathrm{C}_n$.

- $\displaystyle\sum_{(p,q)\in \mathrm{Q}_n} a_p b_q = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} a_p b_q = \sum_{p=0}^{n} a_p \sum_{q=0}^{n} b_q = \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$.
- Comme pour T_n, $\displaystyle\sum_{(p,q)\in \mathrm{T}_{2n}} a_p b_q = \mathrm{C}_{2n}$.

3. • Comme les $a_p b_q$ sont positifs, les inclusions précédentes induisent alors que $\mathrm{C}_n \leqslant \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n \leqslant \mathrm{C}_{2n}$.
• En notant A et B les sommes des séries de terme général a_n et b_n, comme les termes généraux sont positifs, les suites (A_n) et (B_n) sont croissantes et $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n \leqslant \mathrm{AB}$ pour tout n.
• De même (C_n) est croissante. Étant majorée par AB, elle est convergente : la série $\sum c_n$ est convergente. Notons C sa somme.
• En tant que suite extraite, (C_{2n}) converge et $\mathrm{C}_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{C}$. De l'encadrement précédent, on déduit alors $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{C}$. Autrement dit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.

4. *Application* – Soit $q \in\,]\,0\,;\ 1[$. En prenant $a_n = b_n = q^n$, existence et valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n$.

Les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont à termes positifs et convergentes, de somme $\dfrac{1}{1-q}$. On a : $c_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} q^i q^{k-i} = (k+1)q^k$.

Le résultat précédent donne : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)q^k = \left(\frac{1}{1-q}\right)^2$. En décalant l'indice, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$.

Exercice 2 *Cas des séries absolument convergentes*

On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries **absolument convergentes**.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\qquad c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

1. Montrer, à l'aide de l'exercice précédent, que la série $\sum c_n$ est absolument convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

2. *Application* – Soit $q \in\,]-1\,;\ 0[$. Que dire de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n$?

Solution (**Ex.2 –** *Cas des séries absolument convergentes*)

1. • Par l'inégalité triangulaire, $|c_n| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |a_k|\,.\,|b_{n-k}|$. Et par l'exercice précédent, la série de terme général $c'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |a_k|\,.\,|b_{n-k}|$ converge. Alors par comparaison $\sum |c_n|$ converge. Donc $\sum c_n$ converge.
• Notons A_n, B_n et C_n les sommes partielles respectives de $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$. On a :

$$|\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n - \mathrm{C}_n| = \left|\sum_{(p,q)\in \mathrm{Q}_n\setminus \mathrm{T}_n} a_p b_q\right| \leqslant \sum_{(p,q)\in \mathrm{Q}_n\setminus \mathrm{T}_n} |a_p b_q| \leqslant \sum_{(p,q)\in \mathrm{Q}_n\setminus \mathrm{T}_n} |a_p|\,|b_q|$$

Or $\displaystyle\sum_{(p,q)\in \mathrm{Q}_n\setminus \mathrm{T}_n} |a_p|\,|b_q| = \mathrm{A}'_n\mathrm{B}'_n - \mathrm{C}'_n$ où A'_n, B'_n et C'_n les sommes partielles respectives de $\sum |a_n|$, $\sum |b_n|$ et $\sum c'_n$. Et toujours par l'exercice précédent, $\mathrm{A}'_n\mathrm{B}'_n - \mathrm{C}'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

D'où par encadrement $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n - \mathrm{C}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.

2. *Application* – Pour $q \in \,]-1\,;\,0[$, les séries géométriques sont absolument convergentes donc le même raisonnement conduit à l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n$, qui vaut $\dfrac{q}{(1-q)^2}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ *Et en cas de convergence non absolue ?*

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

a) Justifier que, pour tout couple de réels (a,b), $4ab \leqslant (a+b)^2$, puis que $\dfrac{2}{n+2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1}}$ pour tout k de $[\![\, 0\,;\, n\,]\!]$.

b) En déduire que la série de terme général w_n diverge.

2. On pose maintenant : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

a) Déterminer α_n tel que, pour tout k de $[\![\, 0\,;\, n\,]\!]$, $\quad \dfrac{1}{(k+1)(n-k+1)} = \alpha_n \left(\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{n-k+1}\right)$.

b) Montrer que la série de terme général w_n converge.

Solution (**Ex.3 –** *Et en cas de convergence non absolue ?*)

1. a) • $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geqslant 0$.

• $4(n-k+1)(k+1) \leqslant (n+2)^2$ donc $\dfrac{2}{n+2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1}}$.

b) $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+n-k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}$, et en particulier

$|w_n| \geqslant (n+1)\dfrac{2}{n+2}$ donc (w_n) ne peut pas tendre vers 0 et la série de terme général w_n diverge (grossièrement).

2. a) Pour tout k de $[\![\, 0\,;\, n\,]\!]$, $\quad \dfrac{1}{(k+1)(n-k+1)} = \dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{n-k+1}\right)$.

b) $w_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(n-k+1)} = \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{2(-1)^n}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{2(-1)^n}{n+2} \mathrm{H}_{n+1}$,

(H_n) désignant la suite des sommes partielles de la série harmonique.

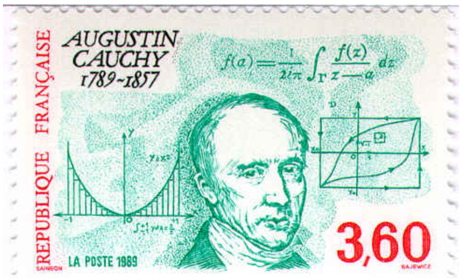
Montrons que la série alternée des w_n est convergente.

D'abord : $|w_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{n} \ln(n+1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Ensuite :

$|w_{n+1}| - |w_n| = \dfrac{2}{n+3}\mathrm{H}_{n+2} - \dfrac{2}{n+2}\mathrm{H}_{n+1} = 2\left(\mathrm{H}_{n+1}\left(\dfrac{1}{n+3} - \dfrac{1}{n+2}\right) + \dfrac{1}{(n+3)(n+2)}\right) = \dfrac{2}{(n+3)(n+2)}\big(-\mathrm{H}_{n+1} + 1\big) \leqslant 0$: $(|w_n|)$ décroît.

La série alternée des w_n est convergente.



Augustin Cauchy (1789–1857)