

Compétences évaluées en colle :

Les exercices se placent en dimension 3 ou 4.

- I. Savoir montrer qu'une application est linéaire ;
- II. Savoir montrer qu'une application est un endomorphisme ;
- III. Savoir établir la matrice représentant un endomorphisme relativement à une base donnée ;
- IV. Savoir déterminer le rang, le noyau et l'image d'un endomorphisme en exploitant une matrice représentative ;
- V. Savoir étudier l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité d'un endomorphisme ;
- VI. Savoir montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel ;
- VII. Savoir montrer que deux sous-espaces sont en somme directe ;
- VIII. Savoir montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires.

1 Séries numériques

- 1.1 • *Série Géométrique* - $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$.

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

- *Série de Riemann* - $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
- *Série exponentielle* - $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout x de $\mathbb{R}$. Sa somme est $\exp(x)$.

1.2 Divergence grossière

Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si u_n ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ diverge grossièrement.

1.3 Série des différences

La série $\sum_{n \geq n_0} (u_{n+1} - u_n)$ converge si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge.

1.4 Critère de D'Alembert

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite ne s'annulant pas.

- Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ avec $\ell \in [0; 1[$, alors la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge absolument.
- Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ avec $\ell \in]1; +\infty]$, alors la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ diverge grossièrement.

1.5 Absolue convergence

Si la série $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ converge, alors la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

Dans ce cas, on dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est **absolument convergente**.

Remarque : lorsqu'elles convergent, les séries de référence du premier point sont absolument convergentes.

1.6 Critères de convergence

- *Comparaison* - Si $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq v_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge (absolument).

- *Domination, négligeabilité* - Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ (en particulier si $u_n = o(v_n)$) et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ est **absolument** convergente alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge (absolument).

- *Équivalence* - Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ avec v_n de signe constant au voisinage de $+\infty$ alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont de même nature.

1.7 Théorème spécial des séries alternées (Leibniz)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Alors :

- $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n u_n$ converge, ainsi que $\sum_{n \geq n_0} (-1)^{n+1} u_n$,
- $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est du signe de $(-1)^{N+1} u_{N+1}$ (i.e. de son premier terme),
- on a la majoration : $|R_N| \leq u_{N+1}$.

1.8 Formule de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

1.9 Constante γ d'Euler - Hors programme mais utile

$\exists \gamma \in \mathbb{R}$ telle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$. En conséquence, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

1.10 Produit de Cauchy

① Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries numériques. Le produit de Cauchy de ces

séries est la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ où : $\forall n \geq 0, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

② Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent absolument, alors leur produit de

Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$.

2 Intégrales généralisées

2.1 Intégrales de Riemann

- Pour $a > 0$, $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

- $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ convergent si, et seulement si, $\alpha < 1$.

2.2 Intégrales de référence en exp et ln

- $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ existe si, et seulement si, $\alpha \in]0; +\infty[$, et vaut $\frac{1}{\alpha}$ dans ce cas.

- $\int_0^1 \ln t dt$ existe et vaut -1 .

2.3 Translation de la variable

- $f :]a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable en a^+ si, et seulement si, $t \mapsto f(a+t)$ est intégrable en 0^+ .

- De même sur $[a; b[$: f intégrable en b^- ssi $t \mapsto f(b-t)$ intégrable en 0^+ .

2.4 Intégrales faussement impropres

Pour $f : [a; b[(b \neq +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{t \rightarrow b} f(t)$ existe et est finie,

$\int_a^b f(t) dt$ existe. f est prolongeable par continuité en b et on dit que $\int_a^b f(t) dt$ est *faussement impropre*.

Idem pour $f :]a; b[(a \neq -\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continue de limite finie en a .

Une intégrale n'est jamais faussement impropre en $-\infty$ ou $+\infty$

2.5 Absolue convergence, inégalité triangulaire et intégrabilité

Si $\int_a^b |f(t)| dt$ existe, alors $\int_a^b f(t) dt$ existe, et on a l'*inégalité triangulaire* :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

On dit dans ce cas que $\int_a^b f(t) dt$ est *absolument convergente* ou que f est *intégrable* sur $]a; b[$. Dans les exemples de référence des points 1 et 2, lorsque que les intégrales convergent, elles convergent absolument et les intégrandes sont intégrables.

2.6 Critères de convergence

On considère $f, g : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux, éventuellement $b = +\infty$.

Les critères ci-dessous sont valables aussi pour $f, g :]a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ en permutant les rôles de a et de b , avec éventuellement $a = -\infty$.

- *Comparaion - Version signée*

On suppose $\boxed{0 \leq} f \leq g$. Alors

(i) si $\int_a^b g(t) dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

(ii) si $\int_a^b f(t) dt$ diverge alors $\int_a^b g(t) dt$ diverge.

- *Comparaion - Version intégrabilité*

Si $|f| \leq g$ et g est intégrable sur $[a; b[$ alors f est intégrable sur $[a; b[$.

- *Domination, négligeabilité*

Si $f = \mathcal{O}(g)$ en b (en particulier si $f = o(g)$) et g est intégrable sur $[a; b[$ alors f est intégrable sur $[a; b[$.

- *Équivalence - Version signée*

Mise en garde : « f et g sont de signe constant » n'est pas équivalent à « f et g sont de même signe ».

Si $f \sim g$ en b et si f et g sont de signe constant alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature.

• *Équivalence - Version intégrabilité*

Si $f \sim g$ en b alors f est intégrable sur $[a; b[$ si, et seulement si, g l'est.

2.7 Changement de variable

Soit $\varphi :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ (où éventuellement $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$) une bijection C^1 et strictement monotone. Soit $f : \varphi(]a; b[) \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

Alors $\int_{\varphi(a^+)}^{\varphi(b^-)} f(u)du$ et $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature, et égales en cas d'existence. En général, on baptise $u :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \varphi(t)$ et on écrit $\frac{du}{dt} = \varphi'(t)$. Autrement dit, on assimile la nouvelle variable à la fonction φ .

2.8 Intégration par parties

Soit $u, v :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ (où éventuellement $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$) de classe C^1 .

Si $\lim_{t \rightarrow a^+} u(t)v(t)$ et $\lim_{t \rightarrow b^-} u(t)v(t)$ existent et sont finies, alors $\int_a^b u'v$ et $\int_a^b uv'$ sont de même nature.

En cas d'existence, on a : $\int_a^b u'v = [uv]_{a^+}^{b^-} - \int_a^b uv'$.

2.9 Fonction continue positive d'intégrale nulle

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable sur l'intervalle I . Si $\int_I |f| = 0$ alors $f = 0$ sur I .

3 Rappels d'algèbre linéaire

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Espaces vectoriels de référence

• $\mathbb{K}^n$ est un espace de dimension n admettant $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ pour base canonique avec

$$\begin{aligned} e_1 &\stackrel{\text{déf.}}{=} (1, 0, 0, \dots, 0), \\ e_2 &\stackrel{\text{déf.}}{=} (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ e_n &\stackrel{\text{déf.}}{=} (0, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n = \sum_{i=1}^n x_ie_i$.

• $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un espace de dimension n admettant $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ pour base canonique avec

$$E_1 \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad E_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Pour tout } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad X = x_1E_1 + x_2E_2 + \dots + x_nE_n = \sum_{i=1}^n x_iE_i.$$

• $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace de dimension np admettant $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ pour base canonique où, pour tout (i, j) , $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé i -ème ligne et j -ème colonne qui vaut 1.

Pour tout $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $M = \sum_{i,j} m_{i,j}E_{i,j}$.

• $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace de dimension $n+1$ admettant $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ pour base canonique.

3.2 $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire ssi :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$$

3.3 Soit $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire. Le noyau de f est :

$$\text{Ker}(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \{u \in E / f(u) = 0_F\}.$$

3.4 Soit $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire. L'image de f est :

$$\text{Im}(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \{f(u) / u \in E\} = \{v \in F / \exists u \in E \text{ tq } f(u) = v\}.$$

3.5 Détermination pratique de l'image

$f : E \rightarrow F$ est une application linéaire avec E de dimension finie n .

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\mathcal{B})) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

La famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ n'est pas nécessairement libre !

3.6 Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre :

- | | | |
|--|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> i. M est inversible. ii. $\text{rg}(M) = n$. iii. $\det(M) \neq 0$. | } | <ul style="list-style-type: none"> iv. Le système $MU = 0$ admet une unique solution ($U = 0!$). v. $\text{Ker}(M) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$ |
|--|---|--|

3.7 Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Soit E et F de dimension finie, $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire.

- Si $\dim E \neq \dim F$ alors f n'est pas un isomorphisme.
- Si $\dim E = \dim F$ alors il y a équivalence entre :

- | | | |
|--|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> i. f est un isomorphisme. ii. f est injective. iii. f est surjective. | } | <ul style="list-style-type: none"> iv. $\text{rg}(f) = \dim F (= \dim E)$. v. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible. vi. $\det(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)) \neq 0$. |
|--|---|---|

3.8 Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension n . La **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, est

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}),$$

autrement dit : les colonnes de $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ sont formées des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{C}$ dans la bases $\mathcal{B}$.

3.9 Passage réciproque

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension n . La matrice de passage de $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est inversible, et

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$$

3.10 Formules de changement de bases

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

- Soit x un vecteur de E . Alors :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(x) = \mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$$

- Soit f un endomorphisme de E . Alors :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

3.11 Similitude

Deux matrices carrées A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

On a alors $A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, B^n = P^{-1}A^nP$.

3.12 Trace

- La trace de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la somme de ses coefficients diagonaux : $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.
- $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \text{Tr}(A)$ est une forme linéaire.
- $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$
- $B = P^{-1}AP \Rightarrow \text{Tr}(B) = \text{Tr}(A)$

3.13 Somme directe de deux sous-espaces.

Soit F et G deux sous-espaces de E . Il y a équivalence entre :

- i. la somme $F + G$ est directe (notée $F \oplus G$), ii. $F \cap G = \{0\}$,
- iii. $\forall u \in F + G, \exists!(f, g) \in F \times G, u = f + g$,

et en dimension finie :

- iv. $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$,
- v. en concaténant une base de F et une base de G on obtient une base de $F + G$.

4 Polynômes

4.1 Degré

- ① $\deg(0) = -\infty$
- ② $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ avec égalité si (mais pas seulement) $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
- ③ $\deg(PQ) \leq \deg(P) + \deg(Q)$
- ④ $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \deg(Q)$ si Q non nul

4.2 Formule de Leibniz

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

4.3 Division euclidienne

Soit A un polynôme quelconque de $\mathbb{K}[X]$ et B un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$.

Alors il existe deux polynômes Q et R tels que

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

4.4 Formule de Taylor et translation

$$\textcircled{1} P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

$$\textcircled{2} P(X+a) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

4.5 Racines et multiplicité

Il y a équivalence entre

$\textcircled{1}$ a est une racine d'ordre de multiplicité $\mu \in \mathbb{N}^*$ de P

$\textcircled{2}$ $(X-a)^\mu$ divise P et $(X-a)^{\mu+1}$ ne divise pas P

$$\textcircled{3} \begin{cases} P(a) = 0 \\ P'(a) = 0 \\ \vdots \\ P^{(\mu-1)}(a) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad P^{(\mu)}(a) \neq 0$$

4.6 Théorème de D'Alembert-Gauß et conséquence

$\textcircled{1}$ Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède (au moins) une racine complexe.

$\textcircled{2}$ Tout polynôme de degré au plus n admettant strictement plus de n racines comptées avec leur multiplicité est nul.

4.7 Polynômes réels et racines complexes

$\textcircled{1}$ Si P est un polynôme à coefficients réels admettant une racine complexe α de multiplicité μ , alors $\bar{\alpha}$ est aussi racine de P , de même multiplicité μ .

$\textcircled{2}$ Les racines complexes d'un polynôme réel sont deux à deux conjuguées.

4.8 Liens coefficients-racines

$\textcircled{1}$ Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ où $d = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$ un polynôme **scindé** de $\mathbb{K}[X]$

c'est-à-dire pouvant se décomposer en $P = a_d \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{\mu_i}$.

$$\text{Alors } \sum_{i=1}^r \mu_i \alpha_i = -\frac{a_{d-1}}{a_d} \text{ et } \prod_{i=1}^r \alpha_i^{\mu_i} = (-1)^d \frac{a_0}{a_d}.$$

$\textcircled{2}$ En particulier, les racines α et β du trinôme $X^2 - sX + p$ vérifient $\alpha + \beta = s$ et $\alpha\beta = p$.

4.9 Polynômes irréductibles

$\textcircled{1}$ Le polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit irréductible s'il est non constant et si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

$\textcircled{2}$ Autrement dit, P non constant est irréductible si, et seulement si, $P = AB$ entraîne A ou B est constant.

4.10 Caractérisation des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$

$\textcircled{1}$ Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes du premier degré

$$P = aX + b = a\left(X - \frac{-b}{a}\right) \quad \text{avec } a \neq 0.$$

$\textcircled{2}$ Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes du premier degré

$$P = aX + b = a\left(X - \frac{-b}{a}\right) \quad \text{avec } a \neq 0$$

et les polynômes du second degré sans racines réelles

$$P = aX^2 + bX + c \quad \text{avec } b^2 - 4ac < 0.$$

4.11 Décomposition des polynômes dans $\mathbb{K}[X]$

$\textcircled{1}$ Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ peut se factoriser

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{\mu_k}$$

où les α_k sont les racines de P , de multiplicité respective μ_k ,

λ est le coefficient dominant de P et $\sum_{k=1}^r \mu_k = \deg(P)$.

$\textcircled{2}$ Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut se factoriser

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{\mu_k} \times \prod_{j=1}^s (X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{\nu_j}$$

où les α_k sont les racines de P , de multiplicité respective μ_k ,

$\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$ pour tout j de $\llbracket 1; s \rrbracket$, λ est le coefficient dominant de P et

$$\sum_{k=1}^r \mu_k + 2 \sum_{j=1}^s \nu_j = \deg(P).$$

4.12 Cas de $X^n - 1$

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n}) = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$$

où $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n}, 0 \leq k \leq n-1\}$ est l'ensemble des racines n -ièmes de 1.

4.13 Décomposition en éléments simples

- ① On appelle fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ le quotient de P par Q , défini en tout point où Q ne s'annule pas.
- ② Les pôles de F sont les racines du polynôme Q .
- ③ On dit que le pôle a de F est simple lorsque a est une racine simple de Q .
- ④ Si Q est scindé à racines simples (donc les pôles de F sont tous simples) s'écrit $Q = \lambda \prod_{k=1}^n (X - a_k)$, alors il existe un polynôme E et n scalaires $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que

$$F = E + \frac{b_1}{X - a_1} + \cdots + \frac{b_n}{X - a_n}$$

où E s'obtient par division euclidienne de P par Q et chaque b_k s'appelle le résidu de a_k .

- ⑤ Dans le cas précédent, on peut montrer que $b_k = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}$.
- ⑥ On rencontre fréquemment

$$\frac{1}{X(X+a)} = \frac{1/a}{X} - \frac{1/a}{X+a}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{X^2 - a^2} = \frac{1/(2a)}{X-a} - \frac{1/(2a)}{X+a}$$

et notamment les cas $a = \pm 1$.