

**Exercice 1** *Lemme de Riemann-Lebesgue*

Soit  $a < b$  deux réels. Soit  $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_a^b \sin(nt) f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2. Que dire de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \cos(nt) f(t) dt$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{int} f(t) dt$  ?

**Exercice 2** *Calcul de l'intégrale de Dirichlet*

On suppose établie la convergence de l'intégrale de Dirichlet  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ .

1. On pose  $f : ]0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$ .
- Vérifier que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.
  - On note  $\tilde{f}$  le prolongement par continuité obtenu.  
Montrer que  $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1([0; \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ .

- c) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) \tilde{f}(t) dt$ .

2. On pose, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt) \cos(t)}{\sin(t)} dt.$$

- Justifier l'existence de l'intégrale définissant  $I_n$ .
- Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $I_{n+1} - I_n = 0$ .
- En déduire la valeur de  $I_n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

3. a) Montrer que pour tout  $n \geq 1$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt = I_n - \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) \tilde{f}(t) dt.$$

- b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt$ .

- c) Montrer finalement que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ .

INDICATIONS, SI ÇA BLOQUE TROP :  
Exercice 1

1. Justifier que  $f$  et  $f'$  sont bornées et l'exploiter pour majorer  $\left| \int_a^b \sin(nt) f(t) dt \right|$ .

**Exercice 2**

1.b) Il traîne dans notre caisse à outils de première année un théorème sur la limite de la dérivée...

1.c) Il y a un exercice 1.

2.b) Transformer  $\sin(2(n+1)t) - \sin(2nt)$  en un produit.

2.c) Que vaut  $I_1$  ?

3. Synthèse des résultats précédents, comme souvent pour une dernière question.