

Exercice 1 *Natures*

Déterminer la nature de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle I :

1. $f : t \mapsto \frac{1}{t^2 + 2t + 1}$, $I = [0; +\infty[$
2. $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t^3 + 1}}$, $I = [1; +\infty[$
3. $f : t \mapsto \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^3 + t^2}}$, $I =]0; 1]$
4. $f : t \mapsto \frac{\sin(t) + \cos(t)}{\sqrt{t^3 + 1}}$, $I = [0; +\infty[$
5. $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{\ln(t)}$, $I =]1; 2]$
6. $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{\ln(t)}$, $I = [2; +\infty[$
7. $f : t \mapsto \frac{t - [t]}{t^2}$, $I =]0; +\infty[$
8. $f : t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$, $I =]0; +\infty[$

Solution (Ex.1 – Natures)

1. Convergente : $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, ou encore $F : t \mapsto \frac{-1}{t+1}$;
2. Convergente : $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^{3/2}} = o\left(\frac{1}{t^{5/4}}\right)$;
3. Divergente : $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$;
4. Convergente : $\forall t \geq 1, |f(t)| \leq \frac{2}{t^{3/2}}$;
5. Divergente :
 $f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{e^{-1}}{t-1}$, et par translation de la variable $\int_1^2 \frac{dt}{t-1}$ est de même nature que
l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{du}{u}$, donc divergente.
6. Convergente : $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, ou encore : $\forall t \geq 3, f(t) \leq e^{-t}$;
7. Divergente : $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^2}$ assure l'intégrabilité en $+\infty$,

mais : $\forall t \in]0; 1[, f(t) = \frac{1}{t}$ entraîne la divergence de $\int_0^1 f(t)dt$;

8. Convergente : $\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ assure l'intégrabilité en $+\infty$,
et en 0 : $\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = \ln(t^2 + 1) - 2\ln(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -2\ln(t)$ or $\int_0^1 \ln(t)dt$ converge ...

Remarque : une intégration par parties peut aussi justifier la convergence (et donner la valeur) :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} = \pi \dots$$

Exercice 2 *Calculs*

Montrer l'existence et calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$
2. $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(\exp(x)+1)(\exp(-x)+1)}$
3. $K = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$
4. $L = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$
5. $M = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$
6. $R = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \ln(\sin x) dx$

Solution (Ex.2 – Calculs)

1. $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ continue positive sur $[0; +\infty[$, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$: convergence par équivalence.
 $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} dx = \left[\ln \frac{x+1}{x+2} \right]_0^{+\infty} = \ln 2.$
2. $f : x \mapsto \frac{1}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)}$ continue positive sur $[0; +\infty[$, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}$: convergence par équivalence.
 $J \stackrel{u=e^x}{=} \int_1^{+\infty} \frac{1}{(u+1)^2} du = \frac{1}{2}.$

3. $f : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ continue positive sur $]0; +\infty[$,
 $\sqrt{x}f(x) = \sqrt{x}\ln(1+x^2) - 2\sqrt{x}\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc $f(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en 0 et $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$:
 convergence par domination en 0 et équivalence en $+\infty$.
 $K \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[x\ln(1+1/x^2)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2} dx = \pi$.
4. $f : x \mapsto \exp(-\sqrt{x})$ continue positive sur $[0; +\infty[$, $x^2 f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination en $+\infty$.
 $L \stackrel{u=\sqrt{x}}{=} \int_0^{+\infty} 2ue^{-u} du \stackrel{\text{IPP}}{=} [-2ue^{-u}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-u} du = 2$.
5. $f : x \mapsto \frac{\ln x}{(1+x)^2}$ continue sur $]0; +\infty[$, $\sqrt{x}f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc $f(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en 0 et
 $x^{3/2}f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination en 0 et en $+\infty$.
 $M \stackrel{u=1/x}{=} -\int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{(u+1)^2} du = -M$ donc $M = 0$.
6. $f : x \mapsto \sin x \ln(\sin x)$ continue sur $]0; \pi/2]$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc intégrale faussement impropre.
 $R \stackrel{x=\cos t}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1-t^2) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1-t) + \ln(1+t) dt = \ln 2 - 1$.

Exercice 3 Une différence entre séries et intégrales

1. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} \sin(t^2) dt$.
Indication : On commencera par poser $u = t^2$, puis par faire une intégration par parties...
2. a) Est-il nécessaire que le terme général de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ tende vers 0 pour que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge ?
 b) Est-il nécessaire que f , continue par morceaux sur $[a; +\infty[$, admette une limite nulle en $+\infty$ pour que $\int_a^{+\infty} f$ existe ?

Solution (Ex.3 – Une différence entre séries et intégrales)

1. Le changement de variable $u = t^2$ conduit à l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du$, qui en intégrant par parties est de même nature que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^{3/2}} du$, elle-même absolument convergente par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{du}{u^{3/2}}$.
2. a) Si une série converge, son terme général tend vers 0 :
 $u_n = \sum_{k=n_0}^n u_k - \sum_{k=n_0}^{n-1} u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = 0$.
 C'est dans le cours de première année.
- b) $f : t \mapsto \sin(t^2)$ est continue sur $[\sqrt{\pi}; +\infty[$, n'admet aucune limite en $+\infty$ et pourtant $\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} f$ existe...

Exercice 4 Fonction gamma d'Euler et suite double d'intégrales

Pour tout x de $]0; +\infty[$, on pose, sous réserve d'existence,

$$\Gamma(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Justifier que la fonction Γ est effectivement définie sur $]0; +\infty[$.
 Γ s'appelle la fonction gamma d'Euler.
2. a) Montrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$,
 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
 b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
 $\Gamma(n) = (n-1)!$
 En quelque sorte, Γ prolonge la factorielle sur $]0; +\infty[$... au décalage d'une unité près.
3. On admet que Γ est une fonction continue.
 Déterminer un équivalent de $\Gamma(x)$ au voisinage de 0.
4. Pour tous p et q de $\mathbb{N}$, on pose sous réserve d'existence,
 $I_{p,q} \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^1 z^p \ln^q z dz$.
 En utilisant le changement de variable $u = -(p+1) \ln z$, justifier l'existence de $I_{p,q}$ et la calculer.

Solution (Ex.4 – Fonction gamma d'Euler et suite double d'intégrales)

- $t^{x-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ assure la convergence en $+\infty$.
 - $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$ et $x-1 > -1$ assure la convergence en 0 (et aussi la divergence si $x \leq 0$...).
- a) Soit $x > 0$. Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Comme $t^x e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et $t^x e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, par une intégration par parties, j'obtiens :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x).$$

b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$...
- $\forall x > 0, \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ or $\Gamma(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \Gamma(1)$ par continuité donc $\Gamma(x+1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$.
D'où $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$.
- Le changement proposé étant une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante,

$$I_{p,q} \stackrel{u=1/(p+1)\ln z}{=} \int_{+\infty}^0 \left(e^{-u/(p+1)}\right)^p \left(\frac{-u}{p+1}\right)^q \left(\frac{-1}{p+1} e^{-u/(p+1)}\right) du$$

$$= \frac{(-1)^q}{(p+1)^{q+1}} \Gamma(q+1) = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}.$$

Exercice 5 *Intégrales à paramètre*
 a désigne un réel de $]0; +\infty[$.

- Justifier l'existence et déterminer la valeur de

$$I_a \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{a^2 + t^2}.$$

- Justifier l'existence de

$$J_a \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt.$$

- À l'aide du changement de variable $u = a^2/t$, calculer J_a .

Solution (Ex.5 – Intégrales à paramètre)

- $t \mapsto \frac{1}{a^2 + t^2}$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$. Comme $\frac{1}{a^2 + t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, on obtient l'existence par équivalence.

$$I_a \stackrel{u=t/a}{=} \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} a du = \frac{1}{a} [\text{Arctan} u]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2a}.$$

- $\frac{\ln t}{a^2 + t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{a^2} \ln t$ donc par équivalence de fonctions négatives (et comme $\int_0^1 \ln t dt$ existe), $\int_0^1 \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt$ existe.
 $t^{3/2} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{\ln t}{a^2 + t^2} = o(t^{3/2})$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt$ existe par domination.
 Donc J_a existe.
- $J_a \stackrel{u=a^2/t}{=} \int_{+\infty}^0 \frac{2 \ln a - \ln u}{a^2 + a^4/u^2} \left(\frac{-a^2}{u^2}\right) du = \int_0^{+\infty} \frac{2 \ln a - \ln u}{u^2 + a^2} du = 2 \ln(a) I_a - J_a$
 d'où $J_a = \ln(a) I_a = \frac{\pi \ln a}{2a}$.

Exercice 6 *Développement asymptotique d'une suite d'intégrales*
 Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \ln(n+x) dx.$$

- Établir que, pour tout entier naturel non nul n , I_n existe.
- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I_n = \frac{\ln n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Solution (Ex.6 – Développement asymptotique d'une suite d'intégrales)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-nx} \ln(n+x)}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{nx}} \frac{\ln(n+x)}{x} = 0 \times 0 = 0$, ainsi
 $e^{-nx} \ln(n+x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et on conclut par négligeabilité ...
- $I_n \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[\frac{-e^{-nx}}{n} \ln(n+x) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)} dx = \frac{\ln n}{n} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)} dx.$
 Alors $\forall x > 0, 0 \leq \frac{e^{-nx}}{n(n+x)} \leq \frac{e^{-nx}}{n^2}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-nx} dx \stackrel{\text{primit.}}{=} \frac{1}{n}$ donne
 $\frac{\ln n}{n} \leq I_n \leq \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^3}$, donc $I_n - \frac{\ln n}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Exercice 7 *Convergence de l'intégrale de Dirichlet*

L'intégrale de Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) est l'intégrale

$$D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

C'est souvent l'intégrale citée comme exemple d'intégrale convergente mais non absolument convergente. On parle parfois d'intégrale semi-convergente.

Dans cet exercice, on établit sa convergence de deux façons, et on étudie ensuite sa « non-absolue convergence ».

1. Pourquoi la convergence de D en 0 est-elle un faux problème ?

La vraie difficulté est donc la convergence en $+\infty$.

2. Méthode citée en 1829 par Dirichlet

On pose, pour tout k de $\mathbb{N}$,

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

- a) Justifier que, pour tout k de $\mathbb{N}$,

$$I_k = (-1)^k |I_k|.$$

- b) En déduire la convergence de la série de terme général I_k .

c) Conclure.

3. Méthode visant à augmenter la puissance du dénominateur

- a) Montrer que

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

converge.

- b) Conclure.

4. Non absolue convergence

- a) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$,

$$|I_k| \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$$

- b) Conclure.

5. On admet que $D = \frac{\pi}{2}$ et on pose, sous réserve d'existence,

$$g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} dt.$$

Justifier l'existence et calculer la valeur de $g(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$.

6. Que dire de

$$\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt ?$$

Solution (Ex.7 – Convergence de l'intégrale de Dirichlet)

1. $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$ donc D en 0 est faussement impropre.

La vraie difficulté est donc la convergence en $+\infty$.

2. Méthode citée en 1829 par Dirichlet

On pose, pour tout k de $\mathbb{N}$,

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

- a) Si k est pair, on a : $\forall t \in [k\pi; (k+1)\pi], \frac{\sin(t)}{t} \geq 0$ donc $I_k \geq 0$, et $I_k = (-1)^k |I_k|$.

Si k est impair, on a : $\forall t \in [k\pi; (k+1)\pi], \frac{\sin(t)}{t} \leq 0$ donc $I_k \leq 0$, et $I_k = -|I_k| = (-1)^k |I_k|$.

- b) Établissons que $(|I_k|)_k$ est une suite décroissante de limite nulle. Notons que

$$|I_k| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt.$$

- Pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$|I_{k+1}| - |I_k| = \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$, effectuons la translation de $t \mapsto t - \pi$ dans la première intégrale :

$$|I_{k+1}| - |I_k| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t+\pi)|}{t+\pi} dt - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \text{ et par } \pi\text{-périodicité de } |\sin|$$

$$|I_{k+1}| - |I_k| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| \left(\frac{1}{t+\pi} - \frac{1}{t} \right) dt = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} -\frac{|\sin(t)| \pi}{(t+\pi)t} dt \leq 0 \text{ par positivité de l'intégrale.}$$

$$|I_k| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \leq \frac{1}{k\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| dt = \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \sin(t) dt \text{ toujours par } \pi\text{-périodicité de } |\sin|, \text{ donc } |I_k| \leq \frac{2}{k\pi}.$$

Par encadrement, $I_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.

- Par le théorème des séries alternées, la série $\sum_k I_k$ converge

c) On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n I_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$ qui existe et est finie :

appelons-la S.

Reste à passer des multiples de π aux réels quelconques. Pour $x \geq 0$, notons n_x l'entier tel que $(n_x + 1)\pi \leq x < (n_x + 2)\pi$.

Explicitement $n_x = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor - 1$, et $n_x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

On a : $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \sum_{k=0}^{n_x} I_k + \int_{(n_x+1)\pi}^x \frac{\sin(t)}{t} dt$

Enfin :

$\left| \int_{(n_x+1)\pi}^x \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq \int_{(n_x+1)\pi}^x \frac{|\sin(t)|}{t} dt \leq (x - (n_x + 1)\pi) \frac{1}{(n_x + 1)\pi}$ et comme $x - (n_x + 1)\pi \leq \pi$, on a : $\left| \int_{(n_x+1)\pi}^x \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{n_x + 1}$.

Bilan :

$\sum_{k=0}^{n_x} I_k \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} S$ et $\int_{(n_x+1)\pi}^x \frac{\sin(t)}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par encadrement,

donc $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} S$: D converge (et S n'est autre que D.)

3. a) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$ donc I est faussement impropre en 0.

$0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$ permet de comparer I à une intégrale convergente en $+\infty$.

b) Une intégration par parties permet de conclure, avec en plus $I = J$.

4. a) $|I_k| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| dt = \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin(t) dt$ toujours par π -périodicité de $|\sin|$, donc $|I_k| \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$.

b) Ainsi $\int_0^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} |I_k| \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Or $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ par divergence de la série harmonique.

Par comparaison, $\int_0^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et l'intégrale de Dirichlet n'est pas absolument convergente.

5. Puisque $x > 0$, le changement de variable $u : t \mapsto xt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ bijectif

strictement croissant de $]0; +\infty[$ sur lui-même.

$g(x) \stackrel{u=xt}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = D = \frac{\pi}{2}$, qui prouve au passage la convergence puisque D converge.

6. L'intégrande est paire (à vérifier!), donc Δ existe (et vaut $2D$).

Exercice 8 Couple d'intégrales

Soit sous réserve d'existence,

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx \text{ et } J = \int_0^\pi \ln(\sin x) dx.$$

1. Montrer que I converge.

2. Montrer que $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos u) du$.

3. À l'aide du changement de variable $u = \pi - x$ dans I, montrer que J existe et vaut $2I$.

4. Montrer que $2I = \frac{1}{2}J - \frac{\pi}{2} \ln 2$.

5. En déduire la valeur de I, puis celle de J.

Solution (Ex.8 – Couple d'intégrales)

1. On sait : $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. A-t-on $\ln \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln x$?

$$\frac{\ln \sin x}{\ln x} = \frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{\ln x} = \frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{\ln x} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1, \text{ donc } \ln \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln x.$$

Or $\int_0^1 \ln x dx$ existe (en utilisant la primitive $x \mapsto x \ln x - x$ par exemple). Dernier détail : $\ln \sin x$ et $\ln x$ sont négatives au voisinage de 0. On passe à l'absolue convergence : $|\ln \sin x| \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x$, donc par le critère des équivalents, I est absolument convergente, donc existe.

2. $I \stackrel{u=\pi/2-x}{=} \int_{\pi/2}^0 \ln \sin(\pi/2 - u) \times (-1) du = \int_0^{\pi/2} \ln \cos u du$.

3. $I \stackrel{u=\pi-x}{=} \int_\pi^{\pi/2} \ln \sin(\pi - u) \times (-1) du = \int_{\pi/2}^\pi \ln \sin u du$.

$$\text{Par Chasles : } J = \int_0^\pi \ln \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx + \int_{\pi/2}^\pi \ln \sin x dx = I + I$$

4. $2I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx + \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x \cos x) dx =$

$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) dx = \int_0^{\pi/2} \ln \sin(2x) dx - \int_0^{\pi/2} \ln 2 dx$$

Et en posant $u = 2x$ dans la première intégrale,

$$2I = \int_0^{\pi} (\ln \sin x) \times \left(\frac{1}{2}\right) du - \frac{\pi}{2} \ln 2 = \frac{1}{2}J - \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

5. 3. dans 4. donne $2I = I - \frac{\pi}{2} \ln 2$ donc $I = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.