Exercice 1 *Endomorphismes échangeurs*

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel. On dit que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est un endomorphisme échangeur s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G non triviaux (c'est-à-dire distincts de $\{0\}$ et de E) tels que :

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}, \quad \varphi(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G} \quad \text{et} \quad \varphi(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}.$$

On dit qu'en endomorphisme φ de E est semblable à un endomorphisme ψ s'il existe un automorphisme g de E tel que $\psi = g^{-1} \circ \varphi \circ g$.

On notera que dans ce cas, $\varphi = \left(g^{-1}\right)^{-1} \circ \psi \circ g$ si bien que ψ est aussi semblable à φ.

Partie A - Étude d'un exemple de $\mathbb{C}^3$

Dans cette partie, $\mathrm{E} = \mathbb{C}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de E et φ désigne l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. On pose $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (0, 1, -1)$, $u_3 = e_3$ et $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$.
 a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E.
 b) Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi)$.
 c) Montrer que φ est un endomorphisme échangeur de E, en précisant les sous-espaces concernés.

2. En exploitant la famille $\mathcal{C}' = (u_1, u_2, -u_3)$, montrer que φ est semblable à $-\varphi$.

Partie B - Propriétés générales

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$.
On considère la matrice M de $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$ définie par blocs par

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ \mathrm{A} & 0_p \end{pmatrix}.$$

3. Calculer le carré de $\begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$ et montrer que M est la somme de deux matrices de carré nul.

4. On considère dans $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice de diagonale par blocs

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -\mathrm{I}_p \end{pmatrix}.$$

Montrer que D est inversible, calculer D^{-1} et en déduire que M est semblable à $-\mathrm{M}$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que φ est un endomorphisme échangeur d'un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie tel que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ avec F et G deux sous-espaces vectoriels non triviaux de E vérifiant $\varphi(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}$ et $\varphi(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}$.

5. a) Décrire la matrice représentant φ dans une base adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.
 b) En déduire qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que $\varphi = a + b$, $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$.
 c) φ et $-\varphi$ sont-ils semblables ?
 d) Que vaut $\mathrm{Tr}(\varphi)$?

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est la calcul de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x.$$

On admettra le résultat classique dû à Léonard Euler $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale I.

2. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose sous réserve d'existence

$$\mathrm{J}_k = \int_0^1 x^k \ln(x)\mathrm{d}x.$$

Justifier l'existence des intégrales J_k et les calculer .

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose sous réserve d'existence

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x.$$

Justifier l'existence des intégrales I_n.

3. Justifier l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$ et calculer sa valeur.

4. a) Proposer une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $]\,0\,;\ 1[$ qui tend vers 1 et vérifie $u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant u_n^n \int_0^{u_n} \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x + \int_{u_n}^1 \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x.$$

c) En déduire la limite de la suite (I_n).

5. a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[\,0\,;\ 1[$,

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t.$$

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \mathrm{I} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{J}_k}{k} \leqslant \mathrm{I}_n.$$

6. Calculer I.

7. Uniquement pour les 5/2 ! ! !

a) Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ en précisant son rayon de convergence.

b) Calculer I à l'aide du théorème d'intégration terme à terme.

Indications, si ça bloque trop :

Exercice 1

2. Vu la définition des endomorphismes *semblables*, deux endomorphismes sont semblables si, et seulement si, leurs matrices sont ? ? ?

Exercice 2

1. Connaissez-vous un équivalent de $\ln(x)$ lorsque $x \longrightarrow 1$?

2.a) Merci de rédigez proprement l'I.P.P.

$\mathrm{J}_k = -\dfrac{1}{(k+1)^2}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

4.a) Si vous n'êtes pas inspirée, vous pourrez vérifier que $u_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ convient.

5.b) Partir de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \dots$

Solution (**Ex.1** – *Endomorphismes échangeurs*)

1. a) $\det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc $\mathcal{C}$ est une base. **Pourquoi faire plus compliqué ?**

b) $\varphi(u_1) = -u_3$, $\varphi(u_2) = -2u_3$ et $\varphi(u_3) = u_1 - u_2$ donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pourquoi s'embêter avec la formule de changement de base et inverser des matrices ? On prend la même base au départ et à l'arrivée...

c) Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(u_3)$, alors $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ car $\mathcal{C}$ est une base et la matrice précédente montre que $\varphi(u_1) \in \mathrm{G}$, $\varphi(u_2) \in \mathrm{G}$ donc $\varphi(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}$ par linéarité, et $\varphi(u_3) \in \mathrm{F}$ donc $\varphi(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}$.
Donc φ est échangeur de F et G.
Notez les blocs qui apparaissent : on est dans une situation opposée à celles des sous-espaces stables,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

2. $\mathcal{M}_{\mathcal{C}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(-\varphi)$.

En notant P la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$, on a :
$\mathcal{M}_{\mathcal{C}'}(\varphi) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(-\varphi)$ s'écrit $\mathrm{P}^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi)\mathrm{P} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(-\varphi)$.
En notant g l'automorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{C}$ est P, cette relation s'écrit finalement :
$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(g^{-1} \circ \varphi \circ g) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(-\varphi)$, donc $g^{-1} \circ \varphi \circ g = -\varphi$.
Une bonne idée : montrer une fois pour toutes que deux endomorphismes sont semblables si, et seulement si, les matrices les représentant dans une base donnée sont semblables.

3. $\begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}^2 = 0$ et de même $\begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ \mathrm{A} & 0_p \end{pmatrix}^2 = 0$

M est la somme de deux matrices de carré nul.

4. $\mathrm{D}^2 = \mathrm{I}_{n+p}$ donc D est inversible, d'inversible D, et le calcul donne $\mathrm{DMD} = -\mathrm{M}$ donc M et $-\mathrm{M}$ sont semblables.
Il faut savoir inverser une matrice diagonale. Au fait, que vaut le produit de deux matrices diagonales ?

5. a) Dans une base $\mathcal{C}$ adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, en notant $n = \dim(\mathrm{F})$ et $p = \dim(\mathrm{G})$, alors $\mathrm{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ \mathrm{A} & 0_p \end{pmatrix}$.

b) Avec $a \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(a) = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ \mathrm{A} & 0_p \end{pmatrix}$ et $b \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(b) = \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$, alors $\varphi = a + b$, $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$.

c) φ et $-\varphi$ sont semblables car M et $-\mathrm{M}$ semblables.

d) $\mathrm{Tr}(\varphi) = \mathrm{Tr}(-\varphi)$ par similitude, mais $\mathrm{Tr}(-\varphi) = -\mathrm{Tr}(\varphi)$ par linéarité. Donc $\mathrm{Tr}(\varphi) = -\mathrm{Tr}(\varphi)$, donc $\mathrm{Tr}(\varphi) = 0$.

Solution **(Ex.2 −)**

1. **Tout le monde a commencé par**

$\boxed{\bullet\ f : x \mapsto \ln(1-x)\ln(x) \text{ est continue sur }]\,0\,;\ 1[}$

voire même a souligné que f est positive.

• $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln(x)$ or $-x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0.

• $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)\ln(1-x)$ or $(1-x)\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ donc f est aussi prolongeable par continuité en 1.

Ainsi, I est doublement faussement impropre donc existe.

Si vous avez utilisé le critère de négligeabilité (ou d'équivalence) avec $f = o(g)$, il faut préciser soit que $\int g$ converge $\boxed{\text{absolument}}$, soit que g est $\boxed{\text{intégrable}}$.

2. **a)** Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, je pose $g_k :]\,0\,;\ 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k \ln(x)$, qui est continue.

• Chaque g_k est continue sur $]\,0\,;\ 1]$ et prolongeable par continuité en 0 puisque $g_k(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Donc J_k existe en tant qu'intégrale faussement impropre.

• En intégrant par parties puisque ln et $x \mapsto \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\ 1]$ avec $x^{k+1}\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$,

$\mathrm{J}_k = \left[\dfrac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^k}{k+1}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{(k+1)^2}$.

L'intégration par parties (en toutes lettres) sur une intégrale généralisée se redige :

① on écrit qu'on intègre par parties,

② on présente les deux fonctions en jeu, en précisant qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^1$,

③ on détermine les limites aux bornes généralisées (une ou deux), car si elles ne sont pas finies, l'intégration par parties n'est pas légitime,

④ **seulement après, on écrit l'égalité si on sait que l'une des intégrales existe,** ou on dit que les deux intégrales sont de même nature si cette nature n'est pas encore connue.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall x \in]\,0\,;\ 1[, \quad |x^n \ln(1-x)\ln(x)| \leqslant f(x)$$

avec f la fonction intégrable définie à la première question, donc par comparaison I_n existe.

3. $\dfrac{1}{n(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$ assure la convergence de la série puisque $3 > 1$ et ces termes généraux sont positifs.

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{n+1-n}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{\mathrm{N}+1} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

4. **a)** • Par exemple cherchons une suite du type : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 1 - v_n$ avec $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff n\ln(1-v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \iff -nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \iff nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty : v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ convient,

donc $u_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ convient.

• Si on cherche u_n du type $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$ avec $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il nous faut $nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, $v_n = -1/\sqrt{n}$ convient,

et $u_n = \exp\left(\dfrac{-1}{\sqrt{n}}\right)$ convient.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• $\forall x \in]\,0\,;\ u_n]$, $\quad x^n \ln(1-x)\ln(x) \leqslant u_n^n \ln(1-x)\ln(x)$ donc par croissance de l'intégrale

$$\int_0^{u_n} x^n \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x \leqslant u_n^n \int_0^{u_n} \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x \quad (1)$$

• $\forall x \in [\,u_n\,;\ 1[$, $\quad x^n \ln(1-x)\ln(x) \leqslant \ln(1-x)\ln(x)$ donc par croissance de l'intégrale

$$\int_{u_n}^{1} x^n \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{u_n}^{1} \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x \quad (2)$$

- Par la relation de Chasles,
$$\mathrm{I}_n \leqslant u_n^n \int_0^{u_n} \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x + \int_{u_n}^{1} \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x.$$
- Et par positivité de l'intégrale, $\mathrm{I}_n \geqslant 0$ puisque l'intégrande est positive.

Ainsi $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant u_n^n \displaystyle\int_0^{u_n} \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x + \int_{u_n}^{1} \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x$.

c) • $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\displaystyle\int_0^{u_n} \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{I}$,

- puis $u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n^n \displaystyle\int_0^{u_n} \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
- et enfin $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\displaystyle\int_{u_n}^{1} \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Par encadrement, $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

5. a) Soit $x \in [0\,;\,1[$. On a par somme de termes géométriques :
$$\forall t \in [0\,;\,x],\quad \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$
En intégrant sur $[0\,;\,x]$, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout x de $]0\,;\,1[$,
$$\ln(x)\ln(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k \ln(x)}{k} = -\ln(x)\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$$
Le membre de droite étant positif, le membre de gauche l'est aussi.
Remarquons alors que :
$$\begin{aligned}-\ln(x)\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t &\leqslant -\ln(x)x^n\int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t \text{ car } t^n \leqslant x^n\\ &\leqslant \ln(x)x^n\ln(1-x) \text{ en calculant l'intégrale.}\end{aligned}$$
Donc : $\forall x \in]0\,;\,1[$,
$$0 \leqslant \ln(x)\ln(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k\ln(x)}{k} \leqslant \ln(x)x^n\ln(1-x)$$
Et par croissance de l'intégrale
$$0 \leqslant \mathrm{I} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{J}_k}{k} \leqslant \mathrm{I}_n$$

6. Puisque $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, par encadrement on a : $\mathrm{I} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{J}_k}{k}$, i.e.

$$\mathrm{I} \overset{2.a)}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)^2} \overset{3.}{=} 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

7. Uniquement pour les 5/2 ! ! !

a) Le rayon de convergence vaut 1 et : $\forall x \in]-1\,;\,1[\,, \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.

b) $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}\ln(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} h_k(x)\mathrm{d}x$

où, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $h_k :]0\,;\,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto -\dfrac{x^k}{k}\ln(x)$ est continue et intégrable d'après 2.a) et la série de terme général h_k converge simplement vers $f : x \mapsto \ln(1-x)\ln(x)$ continue.

De plus $\displaystyle\int_0^1 |h_k(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{x^k\ln(x)}{k}\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{J}_k}{k} = \frac{1}{k(k+1)^2}$, donc la série de terme général $\displaystyle\int_0^1 |h_k(x)|\,\mathrm{d}x$ converge.
Toutes les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées donc

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} h_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^1 h_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Si on veut appliquer le théorème de permutation en cas de convergence uniforme, il faut se placer sur un segment. C'est possible en prolongeant les fonctions h_k en 0 et 1 par continuité, en posant $h_k(0) = h_k(1) = 0$. Une étude de fonction montre que $||h_k||_{\infty,[\,0\,;\,1]} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{k^2}$ donc la convergence de $\displaystyle\sum_k h_k$ est normale donc uniforme : la permutation est licite !