

Exercice 1 Relation sur les colonnes, noyau et image

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On note M la matrice représentant f dans $\mathcal{C}$, et on appelle C_1, C_2, C_3 les colonnes de M .

On suppose que la famille (C_1, C_2) est libre et qu'il existe α et β deux réels tels que $C_3 = \alpha C_1 + \beta C_2$.

1. Que vaut le rang de f ?
2. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

$$3. \text{ Déterminer le noyau et l'image de } f \text{ lorsque } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution (Ex.1 – Relation sur les colonnes, noyau et image)

1. $\text{rg}(f) = \text{rg}(M) = \text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_1, C_2, \alpha C_1 + \beta C_2) = \text{rg}(C_1, C_2) = 2$
2. $\dim \text{Im}(f) = \text{rg}(f) = 2$ et par le théorème du rang $\dim \text{Ker}(f) = 3 - 2 = 1$.
 $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$ car $f(e_3) = \alpha f(e_1) + \beta f(e_2)$.
 $f(e_3) = \alpha f(e_1) + \beta f(e_2)$ donc $f(\alpha e_1 + \beta e_2 - e_3) = 0$ et
 $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(\alpha e_1 + \beta e_2 - e_3)$
3. En appliquant ce qui précède, (C_1, C_2) est libre et $C_3 = 2C_1 + C_2$ entraîne
 $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 0, 2), (-1, 1, -1))$ et $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((2, 1, -1))$.

Exercice 2 Endomorphisme vérifiant une équation polynomiale

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E vérifiant

$$f^2 - 3f + 2id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

1. Montrer que f est un automorphisme de E .
2. Établir que $\text{Ker}(f - id_E)$ et $\text{Ker}(f - 2id_E)$ sont supplémentaires.
3. On suppose de plus E de dimension finie. Justifier qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentant f est diagonale.
4. Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe une base que l'on déterminera dans laquelle la matrice représentant f est diagonale.

Solution (Ex.2 – Endomorphisme vérifiant une équation polynomiale)

1. Puisque $f^2 - 3f = -2id_E$, en posant $g = \frac{-1}{2}(f - 3id_E)$, on a $f \circ g = g \circ f = id_E$, donc f est bijective et $f^{-1} = g$.

2. Posons $K_1 = \text{Ker}(f - id_E)$ et $K_2 = \text{Ker}(f - 2id_E)$

Soit u dans E .

Analyse : supposons qu'il existe $k_1 \in K_1$ et $k_2 \in K_2$ tels que $u = k_1 + k_2$.

Composons par $f - id_E$: $f(u) - u = f(k_2) - k_2 = 2k_2 - k_2 = k_2$.

Composons par $f - 2id_E$: $f(u) - 2u = f(k_1) - 2k_1 = k_1 - 2k_1 = -k_1$.

Donc s'ils existent, k_1 et k_2 sont uniques.

Synthèse : posons $k_1 = -f(u) + 2u$ et $k_2 = f(u) - u$. On a :

- $k_1 + k_2 = u$;
- $(f - id_E)(k_1) = -f^2(u) + 2f(u) - (-f(u) + 2u) = -(f^2(u) - 3f(u) + 2u) = 0_E$ donc $k_1 \in K_1$;
- $(f - 2id_E)(k_2) = f^2(u) - f(u) - (2f(u) - 2u) = -(f^2(u) - 3f(u) + 2u) = 0_E$ donc $k_2 \in K_2$.

Conclusion : $K_1 \oplus K_2 = E$.

3. Concaténant une base $\mathcal{B}_1$ de K_1 et une base $\mathcal{B}_2$ de K_2 , on obtient une base $\mathcal{C}$

telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}} f = \left(\begin{array}{c|c} I_{d_1} & 0 \\ \hline 0 & 2I_{d_2} \end{array} \right)$ où $d_1 = \dim(K_1)$ et $d_2 = \dim(K_2)$ car pour tout $u \in \mathcal{B}_1$, $f(u) = u$ et pour tout $u \in \mathcal{B}_2$, $f(u) = 2u$.

4. Par le calcul : $M^2 = 3M - 2I_3$, donc $f^2 - 3f + 2id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$, et par ce qui précède, dans une base $\mathcal{C}$ adaptée à $K_1 \oplus K_2 = E$, la matrice représentant f est diagonale.

Détermination de K_1 et K_2 :

$$\text{Ker}(M - I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\text{Ker}(M - 2I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi $\mathcal{C} = ((1, 0, 1), (2, 1, 0), (0, 0, 1))$ convient.

Exercice 3 *Matrice d'un endomorphisme nilpotent*

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et f un endomorphisme de E vérifiant $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Solution (Ex.3 – Matrice d'un endomorphisme nilpotent)

Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe $e \in E$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$.

Soit $\mathcal{B} = (f^{n-1}(e), f^{n-2}(e), \dots, f(e), e)$. $\mathcal{B}$ est une famille de $n = \dim(E)$ vecteurs. Il suffit qu'elle soit libre pour être une base. Montrons que $\mathcal{B}$ est libre.

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$a_{n-1}f^{n-1}(e) + \dots + a_1f(e) + a_0e = 0 \quad (\heartsuit).$$

En composant $(\heartsuit)$ par f^{n-1} , il vient immédiatement $a_0f^{n-1}(e) = 0$ donc $a_0 = 0$ car $f^{n-1}(e) \neq 0$.

$(\heartsuit)$ devient alors $a_{n-1}f^{n-1}(e) + \dots + a_1f(e) = 0$.

En composant $(\heartsuit)$ par f^{n-2} , il vient immédiatement $a_1f^{n-1}(e) = 0$ donc $a_1 = 0$ car $f^{n-1}(e) \neq 0$.

En itérant, on a : $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $a_k = 0$. Donc $\mathcal{B}$ est une base et par conséquent $\mathcal{B}$ est une base.

$$\text{De } f^n(e) = 0 \text{ car } f^n = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ vient alors } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et φ défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\varphi(M) = \text{Tr}(M)A - \text{Tr}(A)M.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer son noyau, son image et son rang.

Solution (Ex.4 – Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

1. Sans souci.
2. Remarquons que si $M \in \text{Ker}(\varphi)$, alors $\varphi(M) = 0 \Rightarrow \text{Tr}(M)A = \text{Tr}(A)M$.
 - Premier cas : $\text{Tr}(A) \neq 0$.
Si $M \in \text{Ker}(\varphi)$, alors $M \in \text{Vect}(A)$. Et réciproquement, si $M \in \text{Vect}(A)$, en posant $M = \lambda A$, $\varphi(M) = \lambda \text{Tr}(A)A - \text{Tr}(A)\lambda A = 0$.
Donc $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(A)$.
Alors $\text{rg}(\varphi) = n^2 - 1$.
De plus : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(\varphi(M)) = 0$ donc $\text{Im}(\varphi) \subset \text{Ker}(\text{tr})$. Par égalité des dimensions, $\text{Im}(\varphi) = \text{Ker}(\text{tr})$.
 - Second cas : $\text{Tr}(A) = 0$.
Alors $\text{Tr}(M) = 0$. Et réciproquement, si $\text{Tr}(M) = 0$, alors $\varphi(M) = 0$.
Donc $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\text{tr})$.
Alors $\text{rg}(\varphi) = n^2 - (n^2 - 1) = 1$.
De plus : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = \text{Tr}(M)A \in \text{Vect}(A)$ donc $\text{Im}(\varphi) \subset \text{Vect}(A)$, et par égalité des dimensions, $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(A)$.

Exercice 5 *Supplémentaires*

Soit $n \geq 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on considère

$$F_i = \{P \in E \mid \forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}, P(j) = 0\}.$$

1. Vérifier que, pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, F_i est un espace vectoriel.
2. Montrer que

$$F_0 \oplus F_1 \oplus \dots \oplus F_n = E.$$
3. Justifier que chaque F_i est une droite vectorielle et donner pour chacun d'eux un polynôme générateur P_i vérifiant $P_i(i) = 1$.
4. Que dire de la famille $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$?

Solution (Ex.5 – Supplémentaires)

1. $F_i \subset E$, $0_E \in F_i$ et $(P(j) = 0, Q(j) = 0) \implies (\lambda P + Q)(j) = 0 \dots$

2. Soit $(P_i)_{0 \leq i \leq n} \in \prod_{i=0}^n F_i$ tel que $\sum_{i=0}^n P_i = 0_E$ ($\heartsuit$).

Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. ($\heartsuit$) évaluée en $X = k$ donne $P_k(k) = 0$ car $P_i(k) = 0$ pour tous les $i \neq k$. Donc P_k s'annule pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{k\}$ car $P_k \in F_k$, ainsi qu'en $k : P_k$ possède au moins $n+1$ racines distinctes et est de degré au plus n , donc $P_k = 0_E$.

Ceci prouve que la somme $\sum_{i=0}^n F_i$ est directe.

Comme chaque F_i n'est pas réduit à $\{0_E\}$ puisqu'il contient $\prod_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}} (X - k)$, on a

$$\dim(F_i) \geq 1, \text{ donc } \dim\left(\bigoplus_{i=0}^n F_i\right) = \sum_{i=0}^n \dim(F_i) \geq n+1$$

Or $\bigoplus_{i=0}^n F_i \subset E$ donc $\dim\left(\bigoplus_{i=0}^n F_i\right) \leq n+1$.

Ainsi $\dim\left(\bigoplus_{i=0}^n F_i\right) = \dim(E)$ et finalement $\bigoplus_{i=0}^n F_i = E$.

3. On a déjà justifié $\forall i, \dim(F_i) \geq 1$. S'il existe un i tel que $\dim(F_i) > 1$, alors $\sum_{i=0}^n \dim(F_i) > n+1$ ce qui contredit ce qui précède. Donc $\forall i, \dim(F_i) = 1$.

Soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On a déjà $Q_i = \prod_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}} (X - k) \in F_i$. Posons alors

$$P_i = \frac{1}{\prod_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}} (i - k)} Q_i, \text{ de sorte que } P_i(i) = 1.$$

4. $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ forme une base de E par concaténation des bases des $F_i \dots$ c'est la base de Lagrange associée aux points de $\llbracket 0; n \rrbracket$, non ?

Exercice 6 Égalité

Soit $F_1, \dots, F_n$ et $G_1, \dots, G_n$ $2n$ sous-espaces vectoriels d'un espace E vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad F_i \subset G_i \quad \text{et} \quad F_1 + F_2 + \dots + F_n = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n.$$

On ne suppose pas la somme des F_i directe.

Démontrer que pour tout i de $\llbracket 1; n \rrbracket$, $F_i = G_i$.

Solution (Ex.6 – Égalité)

Si E est de dimension finie –

Notons d_i et δ_i les dimensions respectives de F_i et G_i .

On a : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, d_i \leq \delta_i$ car $F_i \subset G_i$, donc s'il existe un i tel que $d_i < \delta_i$,

$$\sum_{i=1}^n d_i < \sum_{i=1}^n \delta_i, \text{ ce qui est absurde car } \sum_{i=1}^n d_i \geq \dim\left(\sum_{i=1}^n F_i\right) = \dim\left(\bigoplus_{i=1}^n G_i\right) = \sum_{i=1}^n \delta_i.$$

Donc : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, d_i = \delta_i$, donc $\dim(F_i) = \dim(G_i)$, donc $F_i = G_i$ puisque $F_i \subset G_i$.

Si non, ou si on n'en sait rien –

Soit $(g_1, \dots, g_n) \in G_1 \times \dots \times G_n$ quelconque.

$$\sum_{i=1}^n g_i \in \sum_{i=1}^n F_i \text{ donc il existe } (f_1, \dots, f_n) \in F_1 \times \dots \times F_n \text{ tel que } \sum_{i=1}^n g_i = \sum_{i=1}^n f_i.$$

Alors $\sum_{i=1}^n (g_i - f_i) = 0_E$ donc par unicité de la décomposition dans la somme directe

$$\bigoplus G_i \text{ car } \forall i, g_i - f_i \in G_i, \text{ on a : } \forall i, g_i - f_i = 0 \text{ donc } g_i = f_i \in F_i.$$

Exercice 7 Encore un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit n un entier au moins égal à 2. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi : E \longrightarrow E, M \longmapsto M - \text{Tr}(M)I_n$.

1. a) Vérifier que φ est un endomorphisme de E .

b) Déterminer $\text{Ker } \varphi$.

c) φ est-il un automorphisme ?

2. a) Déterminer l'ensemble E_1 des matrices M telles que

$$\varphi(M) = M.$$

Justifier qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E , préciser sa dimension.

b) Déterminer l'ensemble E_2 des matrices M telles que

$$\varphi(M) = (1 - n)M.$$

Justifier qu'il s'agit d'un sous-espace de E , préciser sa dimension.

3. a) Justifier que E_1 et E_2 sont stables par φ , et supplémentaires.

b) Donner la matrice représentant φ dans une base obtenue en concaténant une base de E_1 et une base E_2 .

Solution (Ex.7 – Encore un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

1. a) Par la linéarité de $\text{Tr}()$, on vérifie sans peine que φ est linéaire.

b) $M \in \text{Ker } \varphi \implies M = \text{Tr}(M)I_n \implies \text{Tr}(M) = \text{Tr}((\text{Tr}(M)I_n)) \implies \text{Tr}(M) = \text{Tr}(M)\text{Tr}(I_n) \implies \text{Tr}(M) = n\text{Tr}(M)$, et comme $n \neq 1, \text{Tr}(M) = 0$.

Or $M = \text{Tr}(M)I_n$ donc $M = 0$. $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.

c) φ est un endomorphisme de E , de dimension finie n^2 . Comme φ est injectif (puisque $\text{Ker } \varphi = \{0\}$), φ est un automorphisme.

2. a) $\varphi(M) = M \iff M - \text{Tr}(M)I_n = M \iff \text{Tr}(M) = 0 \iff M \in \text{Ker}(\text{Tr}())$.

$E_1 = \text{Ker}(\text{Tr}())$, comme tout noyau, c'est un sous-e.v. de E . Comme $\text{Tr}()$ est une forme linéaire non nulle ($\text{Tr}(:)E \rightarrow \mathbb{R}$), $\text{Im}(\text{Tr}()) = \mathbb{R}$, $\text{rg}(\text{Tr}()) = 1$, et par la

formule du rang, $\dim(\text{Ker}(\text{Tr}())) = \dim E - \text{rg}(\text{Tr}())$, donc $\dim(E_1) = n^2 - 1$.

$$\text{b) } \varphi(M) = (1 - n)M \iff M - \text{Tr}(M)I_n = (1 - n)M \iff \frac{\text{Tr}(M)}{n}I_n = M.$$

Donc : $M \in \mathbb{E}_2 \implies M \in \text{Vect}(I_n)$.

Réciproquement, si $M \in \text{Vect}(I_n)$, en écrivant $M = \alpha I_n$, $\frac{\text{Tr}(M)}{n}I_n = \frac{\alpha n}{n}I_n = \alpha I_n = M$ donc $M \in \mathbb{E}_2$.

Donc $\mathbb{E}_2 = \text{Vect}(I_n)$, sous-espace vectoriel de dimension 1 de E .

3. a) On a déjà $\dim(E_1) + \dim(E_2) = n^2 = \dim(E)$.

Soit $M \in E_1 \cap E_2$. Alors $\text{Tr}(M) = 0$ et $\exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha I_n$.

Alors $0 = \text{Tr}(M) = \text{Tr}(\alpha I_n) = \alpha \text{Tr}(I_n) = \alpha n$, donc $\alpha = 0$ puisque $n \neq 0$.

Donc $M = 0$.

b) Soit $\mathcal{B} = (A_1, \dots, A_{n^2-1}, B)$ une base de E avec $A_i \in E_1$ pour $1 \leq i \leq n^2-1$ et $B \in E_2$.

Alors

$$\forall i \in \llbracket 1; n^2 - 1 \rrbracket, \varphi(A_i) = 1 \times A_i \text{ et } \varphi(B) = (1 - n)B.$$

Du coup, la matrice de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ représentant φ est la matrice diagonale :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \text{diag}(1, \dots, 1, 1 - n)$$

Exercice 8 Rang et trace d'un projecteur

Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Montrer que $\text{rg}(p) = \text{Tr}(p)$.

Solution (Ex.8 – Rang et trace d'un projecteur)

Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E$,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_{\dim(\text{Im}(p))} & 0 \\ \hline 0 & 0_{\dim(\text{Ker}(p))} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_{\text{rg}(p)} & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-\text{rg}(p)} \end{array} \right)$$

Par conséquent, $\text{rg}(p) = \text{Tr}((p))$.

Exercice 9 $AB - BA = I$?

Soit $n \in \mathbb{N}^* \mathbb{N}$.

Trouver toutes les matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB - BA = I_n.$$

Solution (Ex.9 – $AB - BA = I$?)

Comme $\text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0 \neq n = \text{Tr}(I_n)$, cette équation n'a aucune solution...

Exercice 10 Noyau et image supplémentaires

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

2. On suppose de plus que E est de dimension finie et que

$$\text{rg}(f^2) = \text{rg}(f).$$

a) Montrer que

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \text{ et } \text{Im}(f^2) = \text{Im}(f).$$

b) Montrer que

$$\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E.$$

Solution (Ex.10 – Noyau et image supplémentaires)

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

1. • $f(x) = 0 \implies f^2(x) = 0$ donc $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.

• $x = f^2(y) \implies x = f(f(y))$ donc $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

2. a) • On a $\dim \text{Im}(f^2) = \dim \text{Im}(f)$ donc avec l'inclusion précédente $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$.

• Le théorème du rang entraîne alors $\dim \text{Ker}(f^2) = \dim \text{Ker}(f)$ donc par l'inclusion précédente $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

b) • Le théorème du rang assure que

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim E.$$

• Soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.

Posons $x = f(y)$. Alors $f^2(y) = 0$. Donc $y \in \text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$, donc $f(y) = 0$, i.e. $x = 0$. Donc $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

• Ainsi, on a bien $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.

Exercice 11 Projections et décomposition

Soit $f_1, \dots, f_n$ n endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E tels que

$$f_1 + \dots + f_n = \text{id}_E \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, f_i \circ f_j = 0.$$

1. Montrer que chaque f_i est un projecteur.

2. Montrer que $\bigoplus_{i=1}^n \text{Im}(f_i) = E$.

3. Que peut-on dire de f_1 et f_2 lorsque $n = 2$?

Solution (Ex.11 – Projections et décomposition)

1. En composant l'égalité par f_k , on obtient $f_k \circ f_k = f_k$.

2. • Soit $x \in E$. On a : $x = \sum_{i=1}^n f_i(x)$ donc $x \in \sum_{i=1}^n \text{Im}(f_i)$. Ainsi $E \subset \sum_{i=1}^n \text{Im}(f_i)$.
- L'inclusion réciproque étant évidente, $E = \sum_{i=1}^n \text{Im}(f_i)$.
- Supposons que $\sum_{i=1}^n y_i = 0$ avec $\forall i, y_i \in \text{Im}(f_i)$. En écrivant chaque y_i sous la forme $y_i = f_i(x_i)$, on a $\sum_{i=1}^n f_i(x_i) = 0$, et en composant par f_k , $f_k(x_k) = 0$. Donc $y_k = 0$. Et ceci pour tout k de $\llbracket 1; n \rrbracket$. Donc la somme est directe.
3. f_1 et f_2 sont deux projecteurs associés : f_1 est la projection de E sur $\text{Im}(f_1)$ parallèlement à $\text{Im}(f_2)$ et f_1 est la projection de E sur $\text{Im}(f_2)$ parallèlement à $\text{Im}(f_1)$.

Exercice 12 Polynôme annulateur et inversion

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
- a) Calculer M^2 et en déduire un polynôme annulateur de M de degré 2.
- b) En déduire l'inversibilité de M ainsi que son inverse.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit P un polynôme annulateur de M .
Montrer que si $P(0) \neq 0$, alors M est inversible et M^{-1} est une combinaison linéaire de puissance (d'exposant positif) de M .

Solution (Ex.12 – Polynôme annulateur et inversion)

1. a) $M^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} = 5M + 2I_2$ donc $P = X^2 - 5X - 2$ est un polynôme annulateur de M .
- b) $M(M - 5M) = 2I_2$.

Exercice 13 Polynôme annulateur et bijectivité

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et φ défini sur E par

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = P - P'.$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer un polynôme annulateur non nul de φ .

3. Justifier que φ est bijectif et déterminer φ^{-1} à l'aide des puissances de φ , puis en explicitant $\varphi^{-1}(P)$ en fonction de P .
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant $E = \mathbb{R}_3[X]$ par $E = \mathbb{R}_n[X]$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.

Solution (Ex.13 – Polynôme annulateur et bijectivité)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et φ défini sur E par

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = P - P'.$$

1. Sans souci φ est un endomorphisme de E .
2. En écrivant la matrice M de φ dans la base canonique de E , on remarque que $M - I_4$ est nilpotente, avec $(M - I_4)^4 = 0$.
Donc $(X - 1)^4 = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$ est un polynôme annulateur de φ .
3. On a alors $\varphi \circ (-\varphi^3 + 4\varphi^2 - 6\varphi + 4id_E) = id_E$ donc φ est bijective avec $\varphi^{-1} = -\varphi^3 + 4\varphi^2 - 6\varphi + 4id_E$.
 $\varphi^0 = id_E$, $\varphi^1 = \varphi$, $\varphi^2 : P \mapsto P - 2P' + P''$, $\varphi^3 : P \mapsto P - 3P' + 3P'' - P^{(3)}$ conduit à $\varphi^{-1}(P) = P + P' + P'' + P^{(3)}$.
4. Les mêmes raisonnements donne comme polynôme annulateur

$$(X - 1)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k X^{n+1-k}$$

et

$$\varphi^{-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} (-1)^{k+1} \varphi^{n-k} : P \mapsto P + P' + \dots + P^{(n)}$$

Pour la dernière expression, on voit sans peine qu'avec cette expression de φ , on a bien $\varphi \circ \varphi^{-1}(P) = P$ puisque $P^{(n+1)} = 0$.