Exercice 1 *CVU sur $\mathbb{R}$? Sur les segments ?*

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{nx}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $a \in]0\,;+\infty[$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[-a\,;a]$.
3. Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment du type $[\alpha\,;\beta]$ où $\alpha < \beta$?

Exercice 2 *CVU de fonctions de classe 1*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$.

1. Montrer que chaque f_n est $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 3 *Convergence uniforme ?*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^{1+1/n}}$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. a) Établir, pour tout $\alpha \in]0\,;1]$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$.
   b) La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme ?

Exercice 4 *Quand intégrale et limite permutent ... ou pas*

Soit α un paramètre réel quelconque et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$f_n : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto n^\alpha x \mathrm{e}^{-nx}.$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de α la suite de fonctions (f_n) converge uniformément.
2. Justifier l'existence et déterminer la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x.$$
3. Justifier l'existence et déterminer la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2 x \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x.$$

Exercice 5 *Quelques limites d'intégrales*

Justifier l'existence et déterminer les limites des suites suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_{-1}^1 \cos\frac{t}{3^n}\mathrm{d}t$
2. $\forall n \geq 3, \quad w_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^n + t^{-n}}}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n t \mathrm{d}t$

Exercice 6 *Bon sang mais c'est bien sûr !*

Soit $a \in]0\,;+\infty[$.

1. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{nx + \sin(nx)}{n(a+x)}\mathrm{d}x$.

   Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0\,;1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{nx+\sin(nx)}{n(a+x)}$.
   a) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f à préciser.
   b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.
2. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{n + t\sin(n/t)}{n(at^3+t^2)}\mathrm{d}t$.

   Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n : [1\,;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{n + t\sin(n/t)}{n(at^3+t^2)}$.
   a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ J_n existe.
   b) Montrer que la suite (g_n) converge simplement vers une fonction g à préciser.
   c) Monter que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = \int_1^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$.
   d) Déterminer trois constantes α, β et γ telles que
   $$\forall t \geq 1, \quad g(t) = \frac{\alpha}{t^2} + \frac{\beta}{t} + \frac{\gamma}{at+1}.$$
   e) En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n$ (sans intégrale).
3. Observer les résultats des questions 1) et 2), puis justifier cette observation.

Exercice 7 *CVU d'une suite fonction d'une autre*

Soit $a \in]0\,;+\infty[$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions *définies et positives sur* R, et convergeant uniformément vers une fonction f.

On pose : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{f_n}{a+f_n}$.

Montrer que (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g à préciser.