Exercice 1 *CVU sur $\mathbb{R}$? Sur les segments ?*

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{nx}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $a \in]0\,;\, +\infty[$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[-a\,;\, a]$.
3. Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment du type $[\alpha\,;\, \beta]$ où $\alpha < \beta$?

Solution (**Ex.1 –** *CVU sur $\mathbb{R}$? Sur les segments ?*)

1. • $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   • Pour $x \neq 0$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\sin(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$.
   Donc $f_n \xrightarrow{\mathcal{CS}} 0$.
   • $f_n(x) - 0 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{nx} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$: $f_n - 0$ n'est pas bornée, il n'y a pas convergence uniforme.
2. De : $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin u| \leq |u|$ (IAF par exemple), on tire :
   $\forall x \in [-a\,;\, a]\, |f_n(x)| \leq \dfrac{a}{n}$, donc $\|f_n - 0\|_{\infty,[-a\,;\,a]} \leq \dfrac{a}{n}$,
   donc $\|f_n - 0\|_{\infty,[-a\,;\,a]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: il y a convergence uniforme sur $[-a\,;\, a]$.
3. Soit $a = \max(|\alpha|, |\beta|)$ de sorte que $[\alpha\,;\, \beta] \subset [-a\,;\, a]$.
   Alors, par définition d'un « *sup* », $\|f_n - 0\|_{\infty,[\alpha\,;\,\beta]} \leq \|f_n - 0\|_{\infty,[-a\,;\,a]}$,
   donc par encadrement $\|f_n - 0\|_{\infty,[\alpha\,;\,\beta]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: il y a convergence uniforme sur tout segment.

Exercice 2 *CVU de fonctions de classe 1*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$.

1. Montrer que chaque f_n est $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Solution (**Ex.2 –** *CVU de fonctions de classe 1*)

1. Par opérations algébriques élémentaires, les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ car $\sqrt{.}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{x^2} = |x|$, donc (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f avec $f(x) = |x|$.
   En multipliant par la quantité conjuguée : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $|f\,n(x) - f(x)| = \dfrac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + \sqrt{x^2}} \leq \dfrac{1}{n\sqrt{1/n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n - f\|_\infty \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Ainsi la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction $f = |.|$...
3. ...qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ car $|.|$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 3 *Convergence uniforme ?*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : [0\,;\, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^{1+1/n}}$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. **a**) Établir, pour tout $\alpha \in]0\,;\, 1]$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$.
   b) La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme ?

Solution (**Ex.3 –** *Convergence uniforme ?*)

1. Soit $x \geq 0$. $\dfrac{1}{(1+x)^{1+1/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1+x}$, la suite (f_n) converge simplement vers f : $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.
2. **a**) Soit $\alpha > 0$. Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto 1 + \alpha x - (1+x)^\alpha$. $g'(x) = \alpha\left(1 - (1+x)^{\alpha-1}\right) \geq 0$ car $\alpha - 1 \leq 0$. g est croissante et nulle en 0, donc positive sur $\mathbb{R}^+$.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$. $|f_n(x) - f(x)| \leq \left|\dfrac{1 - (1+x)^{1/n}}{(1+x)^{1+1/n}}\right| \leq \dfrac{(1+x)^{1/n} - 1}{(1+x)^{1+1/n}} \leq \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{(1+x)^{1+1/n}} \leq \dfrac{1}{n}$.
   Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}^+} \leq \dfrac{1}{n}$,
   et par encadrement $\|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}^+} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4 *Quand intégrale et limite permutent ... ou pas*

Soit α un paramètre réel quelconque et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$f_n : [0\,;\, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto n^\alpha x \mathrm{e}^{-nx}.$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de α la suite de fonctions (f_n) converge uniformément.
2. Justifier l'existence et déterminer la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x.$$
3. Justifier l'existence et déterminer la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n^2x\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x.$$

Solution (**Ex.4 –** *Quand intégrale et limite permutent … ou pas*)

1. $f_n \xrightarrow{\mathcal{CS}} f : [0\,;\,+\infty[\to\mathbb{R}, x\mapsto x$.
Par étude de $f_n - f$, $\|f_n - f\|_\infty = (f_n - f)(1/n) = n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-1}$.
Il y a donc convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < 1$.
2. $\alpha = 1/2$ donc il y a convergence uniforme sur le segment $[0\,;\,1]$ et le théorème de permutation s'applique :
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x\left(1+\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$
3. $\alpha = 2$ et il n'y a pas convergence uniforme.
Un calcul explicite par intégration par parties donne :
$\displaystyle\int_0^1 x\left(1+n^2\mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{2} - n\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2}.$

Exercice 5 *Quelques limites d'intégrales*
Justifier l'existence et déterminer les limites des suites suivantes :

1. $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_{-1}^1 \cos\frac{t}{3^n}\mathrm{d}t$
2. $\forall n\geq 3,\quad w_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^n+t^{-n}}}$
3. $\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan^n t\,\mathrm{d}t$

Solution (**Ex.5 –** *Quelques limites d'intégrales*)
Justifier l'existence et déterminer les limites des suites suivantes :

1. Les u_n existent car les intégrandes sont continues sur le segment $[-1\,;\,1]$.
Soit, pour tout n, $f_n : t\mapsto\cos\dfrac{t}{3^n}$, qui est continue.
(f_n) converge simplement vers $f : t\mapsto 1$.
Par convergence uniforme :
Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à cos avec $|\cos'|\leq 1$, on a :
$\forall t\in[-1\,;\,1]\left|\cos\dfrac{t}{3^n}-1\right|\leq 1\times\left|\dfrac{t}{3^n}-0\right|$, donc $\|f_n-f\|_\infty\leq\dfrac{1}{3^n}$.
Par encadrement : $\|f_n-f\|_\infty\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $f_n\xrightarrow{\mathcal{CU}} f$.
Alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n = \lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 1\mathrm{d}t = 2.$
Par le théorème de convergence dominée :
Pour tout n, est dominée par la fonction constante f, intégrable. Par le théorème de convergence dominée, la permutation intégrale/limite est licite :
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n = \lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 1\mathrm{d}t = 2.$
2. Les v_n existent car les intégrandes sont continues sur le segment $[0\,;\,\pi/4]$.
Pour tout n, $f_n : t\mapsto\tan^n t$ est continue et dominée par la fonction constante intégrable sur $[0\,;\,\pi/4]$ $\varphi : t\mapsto 1$. De plus (f_n) converge simplement vers la fonction continue par morceaux $f : t\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } t\in[0\,;\,1[\\ 1\end{cases}$. Par le théorème de convergence dominée, la permutation intégrale/limite est licite :
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/4}f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4}f(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$
La convergence n'est pas uniforme [0,π/4] …
En effet, soit : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad t_n = \mathrm{Arctan}\left(2^{-1/n}\right)$ (obtenu en résolvant $\tan^n t = 1/2$).
Alors : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad t_n\in\,]0\,;\,\pi/4[$ car $2^{-1/n}\in\,]0\,;\,1[$ et $f_n(t)-f(t) = 1/2$.
Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \|f_n-f\|_\infty\geq 1/2$… et $(\|f_n-f\|_\infty)$ ne tend pas vers 0.
3. $\forall n\geq 3,\quad w_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^n+t^{-n}}}$.
• *Existence*
$f_n :]0\,;\,+\infty[\to\mathbb{R}, t\mapsto\sqrt{t^n+t^{-n}}$ est continue sur $]0\,;\,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$ car $t^n+t^{-n}\xrightarrow[t\to 0]{}+\infty$. Donc $\displaystyle\int_0^1 f_n$ existe.
$f_n(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^n/2}$. Par équivalence de fonctions positives, sachant que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{n/2}}$ converge car $\dfrac{n}{2}>1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}f_n$ converge.
Donc w_n existe pour tout $n\geq 3$.
• *Limite simple des f_n*
Si $t>1$, $t^n+t^{-n}\underset{t\to+\infty}{\sim}t^n\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty$ donc $f_n(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$.

Si $t<1$, $t^n+t^{-n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{t}\right)^n \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc $f_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
Si $t=1$, $f_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction continue par morceaux

$$f :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t\neq 1 \\ 1/\sqrt{2} & \text{si } t=1 \end{cases}.$$

• *Domination*
$\forall t\geq 1$, $t^n+t^{-n}\geq t^n$ donc $|f_n(t)|\leq t^{-n/2}$,
$\forall t<1$, $t^n+t^{-n}\geq t^{-n}$ donc $|f_n(t)|\leq t^{n/2}$.
Soit : $\varphi :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}, t\mapsto \begin{cases} t^{3/2} & \text{si } t<1 \\ t^{-3/2} & \text{si } t\geq 1\end{cases}$.
φ est continue et intégrable sur $]0;+\infty[$ (faussement impropre sur $]0;1]$ et comme intégrale de Riemann sur $[1\,;+\infty[$ car $n/2>1$).
• *Par le théorème de convergence dominée*

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f = 0.$$

Exercice 6 *Bon sang mais c'est bien sûr !*
Soit $a\in]0\,;+\infty[$.

1. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{nx+\sin(nx)}{n(a+x)}\mathrm{d}x$.
   Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n : [0\,;1]\to\mathbb{R}, x\mapsto \dfrac{nx+\sin(nx)}{n(a+x)}$.
   a) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f à préciser.
   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n$.
2. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{J}_n=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{n+t\sin(n/t)}{n(at^3+t^2)}\mathrm{d}t$.
   Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $g_n : [1\,;+\infty[\to\mathbb{R}, x\mapsto \dfrac{n+t\sin(n/t)}{n(at^3+t^2)}$.
   a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ J_n existe.
   b) Montrer que la suite (g_n) converge simplement vers une fonction g à préciser.
   c) Monter que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{J}_n=\displaystyle\int_1^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t$.
   d) Déterminer trois constantes α, β et γ telles que
   $$\forall t\geq 1,\quad g(t)=\frac{\alpha}{t^2}+\frac{\beta}{t}+\frac{\gamma}{at+1}.$$
   e) En déduire la valeur exacte de $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{J}_n$ (sans intégrale).
3. Observer les résultats des questions 1) et 2), puis justifier cette observation.

Solution (**Ex.6 –** *Bon sang mais c'est bien sûr !*)

1. a) $f_n(0)=0\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et pour $x\in]0\,;1]$, $f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{x}{a+x}$,
   donc $f_n\xrightarrow{\mathcal{CS}} f : [0\,;1]\to\mathbb{R}, x\mapsto\dfrac{x}{a+x}$.
   $\forall x\in[0\,;1], |f_n(x)-f(x)|=\dfrac{|\sin(nx)|}{n(x+a)}\leq\dfrac{1}{na}$, donc $\|f_n-f\|_\infty\leq\dfrac{1}{na}$.
   Par encadrement, $\|f_n-f\|_\infty\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, et $f_n\xrightarrow{\mathcal{CU}} f$.
   b) Par convergence uniforme de fonctions continues sur un segment, le théorème de permutation s'applique et :
   $$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=[x-a\ln(|x+a|)]_0^1=1-a\ln(1+a)+a\ln a=1+a\ln\left(\frac{a}{a+1}\right)$$
2. a) g_n est continue sur $[1\,;+\infty[$, J_n est impropre en $+\infty$ et $g_n(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{2}{at^3}$.
   Par équivalence de fonctions positives au voisinage de $+\infty$ et intégrabilité de $t\mapsto 1/t^3$ $(3>1)$, J_n existe.
   b) Pour tout $t\geq 1$, $t\sin(n/t)=o(n)$ donc $n+t\sin(n/t)\underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $g_n(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{at^3+t^2}$.
   Donc $g_n\xrightarrow{\mathcal{CS}} g : [1\,;+\infty[\to\mathbb{R}, t\mapsto\dfrac{1}{at^3+t^2}$.
   c) • Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, g_n est continue.
   • $g_n\xrightarrow{\mathcal{CS}} g$.
   • g est continue.
   • De l'inégalité : $\forall x\in\mathbb{R}, |\sin x|\leq|x|$ (IAF par exemple), on tire :
   $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall t\in[1\,;+\infty[, |g_n(t)|\leq\left|\dfrac{2n}{n(at^3+t^2}\right|\leq\dfrac{2}{at^3}$,
   or $t\mapsto\dfrac{2}{at^3}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.
   Par le théorème de convergence dominée, ☞ pour tout n, J_n existe, mais ça on nous l'a déjà fait remarquer ;
   ☞ $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{J}_n$ existe ;
   ☞ $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{J}_n=\displaystyle\int_1^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t$.
   d) $\forall t\geq 1,\quad g(t)=\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{a}{t}+\dfrac{a^2}{at+1}$.

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = \left[-\frac{1}{t} + a\ln\frac{at+1}{a}\right]_1^{+\infty} = 1 + a\ln\left(\frac{a}{a+1}\right)$.

3. Il se pourrait bien que le changement $x = 1/t$ donne $\mathrm{I}_n = \mathrm{J}_n$, ce qui expliquerait TOUT !

Exercice 7 *CVU d'une suite fonction d'une autre*

Soit $a \in]0; +\infty[$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions *définies et positives sur* $\mathbb{R}$, et convergeant uniformément vers une fonction f.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n \overset{\text{déf.}}{=} \frac{f_n}{a+f_n}$.

Montrer que (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g à préciser.

Solution (**Ex.7 –** *CVU d'une suite fonction d'une autre*)

Soit $a \in]0; +\infty[$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions *définies et positives sur* $\mathbb{R}$, et convergeant uniformément vers une fonction f.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n \overset{\text{déf.}}{=} \frac{f_n}{a+f_n}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $g_n(x) = \frac{f_n(x)}{a+f_n(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{f(x)}{a+f(x)}$ car $f_n \xrightarrow{\mathcal{CS}} f$.

   Posons : $g \overset{\text{déf.}}{=} \frac{f}{a+f}$.

   $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,

   $|g_n(x) - g(x)| = \left|\frac{f_n(x)}{a+f_n(x)} - \frac{f(x)}{a+f(x)}\right| = \left|\frac{af_n(x) - af(x)}{(a+f_n(x))(a+f(x))}\right|$

   $|g_n(x) - g(x)| \le \frac{a|f_n(x) - f(x)|}{a^2} \le \frac{|f_n(x) - f(x)|}{a}$ par positivité.

   Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|g_n - g\|_\infty \le \frac{1}{a}\|f_n - f\|_\infty$.

   Comme $f_n \xrightarrow{\mathcal{CU}} f$, par encadrement $\|g_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, autrement dit $g_n \xrightarrow{\mathcal{CU}} g$.

2. • Puisque pour tout n, f_n est $\mathcal{C}^1$, $g_n = \frac{f_n}{a+f_n}$ est aussi $\mathcal{C}^1$ par les théorèmes habituels.

   • (i) Pour tout n, f_n est $\mathcal{C}^1$; (ii) $f_n \xrightarrow{\mathcal{CS}} f$;
   (iii) (f_n') converge uniformément
   donc par le théorème de régularité, f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'$.

   Et comme $g = \frac{f}{a+f}$, g est aussi $\mathcal{C}^1$ avec $g' = \frac{af'}{(a+f)^2}$.