

Durée : 3 heures.

On s'efforcera d'argumenter rigoureusement ses raisonnements en évitant le style télégraphique et en rédigeant de vraies phrases (sujet, verbe et compléments éventuels!). On encadrera la réponse finale de chaque question. Si on est amené à admettre la réponse à une question, *on l'indiquera clairement sur la copie.*

★ ★ ★ ★ ★

Exercice 1

Soit α un réel non nul. On pose, pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

L'objectif de l'exercice est de déterminer la nature de la série de terme général u_n .

1. Dans cette question, on suppose $\alpha < 0$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et en déduire la nature de la série $\sum u_n$.
2. Dans cette question, on suppose $\alpha > 0$.
 - a) Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$, et en déduire la nature de la série $\sum u_n$ lorsque $\alpha > 1$.
 - b) On suppose maintenant $\alpha \in]0; 1]$.
 Déterminer deux réels β et γ tels que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{\gamma}{n^\beta} + o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$
 et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ converge.
3. Finalement, à quelle condition nécessaire et suffisante la série de terme général u_n converge-t-elle ?

Exercice 2

4. Rappeler le développement limité de la fonction sinus à l'ordre quatre en zéro.
5. Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^\alpha} dx$$

existe. On justifiera précisément la réponse.

Exercice 3

Dans cet exercice, on étudie l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$

où pour tout réel α on désigne par $[\alpha]$ la partie entière de α , plus grand entier inférieur ou égal à α .

On notera f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(t) = t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$.

6. a) Justifier que $[x] \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$.
- b) Justifier que l'intégrale I converge et vérifie $I = \int_0^1 f$.
7. a) Justifier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{2n+1}{n(n+1)^2}$ où n décrit $\mathbb{N}^*$.
- b) Déterminer trois constantes réelles a , b et c telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{(n+1)^2}.$$

c) On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$.

8. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\int_{1/(k+1)}^{1/k} f(t) dt = \frac{2k+1}{2k(k+1)^2}$.
- b) En déduire que : $I = \frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 4

Soit la fonction $g : [0; 1] \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \in]0; 1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

L'objectif de l'exercice est de démontrer que g est dérivable sur $[0; 1]$ mais que g' n'est pas intégrable sur $]0; 1]$.

9. a) Montrer que g est continue sur $[0; 1]$.

b) Montrer que g est dérivable sur $]0; 1]$ et vérifie

$$\forall x \in]0; 1], \quad g'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

c) Justifier que g est dérivable en 0 et préciser $g'(0)$.

10. a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$.

b) En déduire que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[\pi; +\infty[$.

11. a) Justifier que $x \mapsto x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ est intégrable sur $[0; 1]$.

b) À l'aide du changement de variable $t = 1/x^2$, étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ sur $]0; 1]$.

c) g' est-elle intégrable sur $]0; 1]$? Justifier.

12. g est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$?

Exercice 5

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(2u) - \text{Arctan}(u)}{u} du.$$

13. a) Justifier que $\text{Arctan}(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$.

On notera que cela permet d'écrire $\text{Arctan}(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u + o(u)$

b) Étudier $x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x)$ pour établir que, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$,

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x) = \frac{\pi}{2}.$$

c) En déduire que

$$\text{Arctan}(2u) - \text{Arctan}(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{u}\right).$$

d) En déduire finalement la convergence de l'intégrale J .

14. On pose, pour tout $x > 0$,

$$J(x) = \int_0^x \frac{\text{Arctan}(2u) - \text{Arctan}(u)}{u} du.$$

a) Établir, pour tout $x > 0$,

$$J(x) = \int_x^{2x} \frac{\text{Arctan}(u)}{u} du.$$

b) En déduire, pour tout $x > 0$,

$$\text{Arctan}(x) \ln(2) \leq J(x) \leq \text{Arctan}(2x) \ln(2).$$

c) En déduire la valeur de J .