

**Solution (Ex.1 - )**

1. Comme  $n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,  $n^\alpha + (-1)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^n$  et  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  : la série diverge grossièrement.

2. a) • Comme  $n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ,  $n^\alpha + (-1)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^\alpha$  et  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ .

• En particulier,  $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$  donc lorsque  $\alpha > 1$ , la série  $\sum |u_n|$  converge par équivalence de termes positifs au terme général de la série de Riemann de paramètre  $\alpha > 1$  donc convergente. Lorsque  $\alpha > 1$ , la série  $\sum u_n$  converge absolument, donc converge.

b) •  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \left( \frac{1}{1 + (-1)^n/n^\alpha} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \left( 1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \right)$

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

•  $u_n = v_n - w_n$  avec  $v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  et  $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ .

Comme  $\alpha > 0$ ,  $(1/n^\alpha)$  est une suite réelle décroissante de limite nulle donc le théorème des séries alternées permet d'affirmer que la série  $\sum v_n$  converge.

Comme  $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ , par équivalence de termes généraux positifs, la série  $\sum w_n$  converge si, et seulement si,  $2\alpha > 1$  d'après la propriété des séries de Riemann.

Ainsi la série  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha \in ]1/2; 1]$ .

3. La série de terme général  $u_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

**Solution (Ex.2 - )**

4.  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

5.  $f : x \mapsto \frac{x - \sin x}{x^\alpha}$  est continue et **positive** sur  $]0; +\infty[$

$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^3/6 + o(x^4)}{x^\alpha} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{6x^{\alpha-3}}$  donc  $f \in L^1(]0; 1], \mathbb{R})$  si, et seulement si,  $\alpha - 3 < 1$  i.e.  $\alpha < 4$ .

$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha-1}}$  car  $x - \sin(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ , donc  $f \in L^1([1; +\infty[, \mathbb{R})$  si, et seulement si,  $\alpha - 1 > 1$  i.e.  $\alpha > 2$ .

Bilan : l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^\alpha} dx$  existe si, et seulement si,  $2 < \alpha < 4$ .

**Solution (Ex.3 - )**

6. a)  $x - 1 \leq [x] \leq x$  et  $x - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$  donc  $[x] \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ .

b)  $\forall t > 1, 0 < \frac{1}{t} < 1$  donc  $f(t) = 0$ , donc  $I = \int_1^{+\infty} f$  existe et vaut 0.

$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t \frac{1}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1$  et 1 est intégrable sur  $]0; 1]$  donc  $\int_0^1 f$  existe. Et par la relation de Chasles,  $I = \int_0^1 f$ .

7. a) Arguments :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$ , positivité, critère des équivalents et série de Riemann de paramètre 2.

b)  $\forall n, u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$ .

c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \underset{\text{télescopage}}{=} 1$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$  donc  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$ .

8. a)  $t \in ]1/(k+1); 1/k[ \Rightarrow f(t) = tk \Rightarrow \int_{1/(k+1)}^{1/k} f(t) dt = \int_{1/(k+1)}^{1/k} t k dt = k \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{1/(k+1)}^{1/k} = \frac{2k+1}{2k(k+1)^2}$

b)  $\int_0^1 f(t) dt \underset{\text{Chasles}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{1/(k+1)}^{1/k} f(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2} u_k = \frac{\pi^2}{12}$ .

**Solution (Ex.4 - )**

9. a)  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  étant  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^*$  et  $\cos$  étant  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ , par composition  $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; 1]$ .  $g$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; 1]$  comme produit de fonctions qui le sont.  
 $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  car  $0 \leq |g(x)| \leq x^2$ . Comme  $g(0) = 0$ ,  $g \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ .
- b) Comme  $g \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ ,  $g$  est dérivable sur  $]0; 1]$  et  $g'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .
- c)  $\left| \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right| = \left| x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq |x|$  donc  $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  :  $g$  est dérivable en 0 et  $g'(0) = 0$ .
10. a)  $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| dt \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi |\sin(t)| dt$  par  $\pi$ -périodicité de  $|\sin|$ , et  
comme  $\int_0^\pi |\sin(t)| dt = \int_0^\pi \sin(t) dt = 2$ ,  $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$
- b) Chasles :  $\int_\pi^{(N+1)\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$  donc  $\text{sinc} \notin L^1([\pi; +\infty[)$ .
11. a)  $x \mapsto x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$  est continue sur  $]0; 1]$  et prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur  $[0; 1]$ .
- b)  $t : x \mapsto 1/x^2$  est  $\mathcal{C}^1$  strictement décroissant sur  $]0; 1]$  donc réalise une bijection de  $]0; 1]$  sur  $[1; +\infty[$ .  
 $\left| \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| dx = |\sqrt{t} \sin(t)| \frac{-dt}{2t^{3/2}} = \frac{-1}{2} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt$  donc  $\int_0^1 \left| \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| dx$  est de même nature que  
 $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt$ , donc diverge d'après la question précédente :  $x \mapsto \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \notin L^1([0; 1], \mathbb{R})$ .
- c) Si  $g'$  était intégrable, alors puisque  $x \mapsto x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$  l'est,  $x \mapsto g'(x) - 2x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$  le serait aussi, ce qui contredit la réponse précédente. Donc  $g'$  n'est pas intégrable sur  $]0; 1]$ .
12. Si  $g$  était  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[0; 1]$ ,  $g'$  serait continue, donc  $|g'|$  aussi et  $g'$  serait intégrable.

### Solution (Ex.5 - )

13. a) Par exemple :  $\frac{\text{Arctan}(u)}{u} = \frac{\text{Arctan}(u) - \text{Arctan}(0)}{u - 0} \xrightarrow{u \rightarrow 0} \text{Arctan}'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$ .
- b)  $f : x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x)$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $f' = 0$  (attention aux compositions), donc  $f$  est constante, et  $f(1) = \frac{\pi}{2}$ ...
- c)  $\text{Arctan}(2u) - \text{Arctan}(u) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{2u}\right) - \frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{2u}\right) \underset{u \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{u} - \frac{1}{2u} + o\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2u} + o\left(\frac{1}{u}\right) \underset{u \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{u}\right)$
- d) L'intégrande est continue sur  $]0; +\infty[$ .  
 $\frac{\text{Arctan}(2u) - \text{Arctan}(u)}{u} \underset{u \rightarrow 0}{=} \frac{2u - u + o(u)}{u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + o(1) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1$  : J est faussement impropre en 0.  
 $\frac{\text{Arctan}(2u) - \text{Arctan}(u)}{u} \underset{u \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^2}\right)$  et  $u \mapsto \frac{1}{u^2} \in L^1([1; +\infty[)$  : J converge par domination en  $+\infty$ .  
J converge d'après la relation de Chasles.
14. a)  $\int_0^x \frac{\text{Arctan}(2u)}{u} du \stackrel{t=2u}{=} \int_0^{2x} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$  donc  $J(x) = \int_0^{2x} \frac{\text{Arctan}(u)}{u} du - \int_0^x \frac{\text{Arctan}(u)}{u} du = \int_x^{2x} \frac{\text{Arctan}(u)}{u} du$
- b) Par croissance de la fonction  $\text{Arctan}$ ,  $\forall u \in [x; 2x], \text{Arctan}(x) \leq \text{Arctan}(u) \leq \text{Arctan}(2x)$  donc  
 $\text{Arctan}(x) \int_x^{2x} \frac{1}{u} du \leq J(x) \leq \text{Arctan}(2x) \int_x^{2x} \frac{1}{u} du$  c'est-à-dire  $\text{Arctan}(x) \ln(2) \leq J(x) \leq \text{Arctan}(2x) \ln(2)$ .
- c) Comme  $\text{Arctan}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$ , par encadrement  $J = \frac{\pi \ln(2)}{2}$ .