

Exercice 1 Tubes de convergence et intégrales

1. Deux limites à maîtriser !

a) Soit $\alpha > 0$ et $x \in [0; 1[$ fixés. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha x^n$?b) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$?Dans cet exercice, on étudie les suites de fonctions définies sur $[0; 1]$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n(1-x), \\ g_n(x) = nx^n(1-x), \\ h_n(x) = (n+1)(n+2)x^n(1-x) \end{cases}$$

2. Montrer que les suites de fonctions (f_n) , (g_n) et (h_n) convergent simplement vers une même fonction φ à préciser.3. a) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément.b) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, la courbe de f_n est toute entière située dans le « tube » de base $[0; 1]$ et de hauteur ε .c) Pour $\varepsilon = 0,04$, donner une valeur possible de n_0 .4. a) Montrer que la suite (g_n) ne converge pas uniformément.b) Justifier que, pour $\varepsilon = 0,1$ et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe (au moins) un indice $n_0 \geq N$ tel que la courbe de g_{n_0} s'échappe du tube de hauteur ε i.e. il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que $g_{n_0}(x_0) > \varepsilon$.5. a) On suppose que la suite (h_n) converge uniformément.En raisonnant sur les tubes de hauteur $\varepsilon > 0$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n(x) dx = 0$.b) Calculer explicitement $\int_0^1 h_n(x) dx$.

c) Conclure.

Exercice 2 Permutation limite/intégrale : les 3 méthodes usuellesSoit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n \sin x}{n+x}$.

On se propose de montrer par trois méthodes à maîtriser que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^\pi f_n(x) dx \right) = \int_0^\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = 2 \quad (\#)$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers $f \stackrel{\text{déf.}}{=} \sin$ sur $[0; \pi]$ et calculer $\int_0^\pi f(x) dx$.

2. Comme en première année.

En majorant $\left| \int_0^\pi f_n(x) dx - \int_0^\pi f(x) dx \right|$, montrer $(\#)$.

3. Par convergence uniforme.

Montrer que la convergence de $(f_n)_n$ vers f est uniforme et justifier $(\#)$.

4. Par convergence dominée.

Proposer une fonction intégrable dominant toutes les f_n et conclure par le théorème de convergence dominée.