Exercice 1 *Puissances par deux méthodes bien différentes*

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Première méthode*
   a) Calculer M^2 et en déduire un polynôme P de degré 2 annulateur de M.
   b) Soit n un entier naturel. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.
   c) En déduire une expression de M^n en fonction de n, I_3 et M.
2. *Seconde méthode*
   a) Justifier que M est semblable à
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   b) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, A^n.
   c) En déduire l'existence d'une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que, pour tout n de $\mathbb{N}$,
   $$M^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}B.$$
   d) Expliciter B et donner une expression de M^n en fonction de n, I_3 et M.

Solution (**Ex.1 –** *Puissances par deux méthodes bien différentes*)

1. a) $M^2 = 4M - 4I_3$ donc $P = X^2 - 4X + 4$ convient.
   b) Le reste cherché étant de degré au plus 1, notons-le $a_nX + b_n$. On a
   $$X^n = QP + a_nX + b_n \qquad (\heartsuit)$$
   $P = (X-2)^2$ admet 2 comme racine double. ($\heartsuit$) évaluée en $X = 2$ fournit
   $$2^n = 2a_n + b_n$$
   En dérivant ($\heartsuit$) et en évaluant à nouveau en $X = 2$
   $$n2^{n-1} = a_n$$
   Le reste cherché est donc $n2^{n-1}X + (2^n - n2^n) = n2^{n-1}X + (1-n)2^n$
   c) ($\heartsuit$) évaluée en $X = M$ fournit $M^n = n2^{n-1}M + (1-n)2^nI_3$
2. a) *Analyse* – En notant f l'endomorphisme canoniquement associé à M. On cherche trois vecteurs formant une base et vérifiant
   $$\begin{cases} f(u) = 2u \\ f(v) = 2v \\ f(w) = v + 2w \end{cases}$$
   Donc u et v sont dans $\mathrm{Ker}(f - 2id)$. En observant $M - 2I_3$, $\mathrm{Ker}(f-2id) = \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,0,-2))$ par exemple. De plus $v = (f-2id)(w)$ donc v doit être choisi dans $\mathrm{Im}(f-2id)$. En observant $M - 2I_3$, $\mathrm{Im}(f-2id) = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ donc **nous n'avons pas le choix pour** v : il doit être colinéaire à $(1,1,1)$.
   Prenons $u = (1,0,-2)$ et $v = (1,1,1)$.
   Notons $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les colonnes représentant v et w dans la base canonique.
   Comme $f(w) = v + 2w \iff MW = V + 2W \iff (M - 2I_3)W = V$ qui correspond au système matriciellement noté
   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

dont une solution est par exemple $(x,y,z)=(0,0,1)$.
Synthèse – On pose $\mathcal{C}=(u,v,w)=\big((1,0,-2),(1,1,1),(0,0,1)\big)$.
Il reste à s'assurer que $\mathcal{C}$ est une base, par exemple en calculant le rang ou le déterminant de $\mathrm{P}=\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\-2&1&1\end{pmatrix}$. On a $\det(\mathrm{P})=1\neq 0$, gagné !
Par les calculs précédents, $f(u)=2u$, $f(v)=2v$ et $f(w)=2w+v$, donc $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)=\mathrm{A}$.

b) *Première méthode* – Après avoir calculé A^2 et A^3 pour se faire une idée, par récurrence on montre que $\mathrm{A}^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&2^n&n2^{n-1}\\0&0&2^n\end{pmatrix}$.

Seconde méthode – En écrivant $\mathrm{A}=2\mathrm{I}_3+\mathrm{N}$ où $\mathrm{N}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ vérifie $\mathrm{N}^2=0_3$, on peut appliquer la formule du binôme de Newton puisque $(2\mathrm{I}_3)\mathrm{N}=2\mathrm{N}=\mathrm{N}(2\mathrm{I}_3)$,
$\mathrm{A}^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{N}^k(2\mathrm{I}_3)^{n-k}=2^n\mathrm{I}_3+n2^{n-1}\mathrm{N}+0_3$, ce qui correspond à la première méthode.

c) $\mathrm{A}^n=2^n\mathrm{I}_3+n2^{n-1}(\mathrm{A}-2\mathrm{I}_3)$ et, par la formule de changement de base, $\mathrm{M}^n=\mathrm{P}\mathrm{A}^n\mathrm{P}^{-1}=2^n\mathrm{I}_3+n2^{n-1}\mathrm{P}(\mathrm{A}-2\mathrm{I}_3)\mathrm{P}^{-1}$.

d) La formule précédente étant valable pour $n=1$, $\mathrm{M}=2\mathrm{I}_3+\mathrm{B}$ donc $\mathrm{B}=\mathrm{M}-2\mathrm{I}_3$. Donc

$$\mathrm{M}^n=2^n\mathrm{I}_3+n2^{n-1}(\mathrm{M}-2\mathrm{I}_3)=2^n(1-n)\mathrm{I}_3+n2^{n-1}\mathrm{M}$$

Exercice 2 *Diagonalisabilité d'une matrice triangulaire par blocs*

Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}$. On pose

$$\mathrm{M}=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{A}&\mathrm{B}\\\hline 0&\mathrm{A}\end{array}\right)\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}).$$

1. Calculer M^k pour tout k de $\mathbb{N}$.
2. Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Expliciter $\mathrm{P}(\mathrm{M})$ à l'aide de P, P′, A et B.
3. En déduire que M est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable et B est nulle.

Solution (**Ex.2 –** *Diagonalisabilité d'une matrice triangulaire par blocs*)

1. Après avoir calculer M^2 et M^3, on conjecture que

$$\forall k\in\mathrm{N},\qquad \mathrm{M}^k=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{A}^k&k\mathrm{A}^{k-1}\mathrm{B}\\\hline 0&\mathrm{A}^k\end{array}\right)\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}).$$

et on le démontre par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$.

2. Soit $\mathrm{P}=\sum_{k=0}^{d}c_k\mathrm{X}^k\in\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{M})=\sum_{k=0}^{d}c_k\mathrm{M}^k=\left(\begin{array}{c|c}\sum_{k=0}^{d}c_k\mathrm{A}^k&\sum_{k=1}^{d}c_kk\mathrm{A}^{k-1}\mathrm{B}\\\hline 0&\sum_{k=0}^{d}c_k\mathrm{A}^k\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{P}(\mathrm{A})&\mathrm{P}'(\mathrm{A})\mathrm{B}\\\hline 0&\mathrm{P}(\mathrm{A})\end{array}\right).$$

3. • Supposons M diagonalisable. Alors il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(M) = 0_{2n}$. Donc $P(A) = 0_n$ et A est diagonalisable.
De plus $P'(A)B = 0$.*Attention :* pour affirmer que B est nulle, il faut être sûr que $P'(A)$ est inversible.
En notant λ_i pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ les valeurs propres de A, répétées autant de fois que leur multiplplpicité, A est semblable à $diag(\lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$ donc $P'(A)$ est semblable à $diag(P'(\lambda_i), 1 \leqslant i \leqslant n)$. Or les λ_i sont toutes des racines de P, donc simples, donc aucune des valeurs propres $P'(\lambda_i)$ de $P'(A)$ n'est nulle. Donc $P'(A)$ est inversible. Donc B est nulle.
• Réciproquement, si A est diagonalisable et B nulle, il existe un polynôme scindé à racines simples P tel que $P(A) = 0$.
Alors $P(M) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & P'(A)B \\ \hline 0 & P(A) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = 0_{2n}$.
Donc M est diagonalisable.

Exercice 3 $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On souhaite démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

1. Dans cette question uniquement, on suppose A inversible. Justifier que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. On revient au cas général et on pose

$$M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $PN = MP$ et conclure.

Solution (**Ex.3 –** $\chi_{AB} = \chi_{BA}$)

1. On a : $BA = (A^{-1}A)BA = A^{-1}(AB)A$ donc AB et BA sont semblables et on par conséquent le même polynôme caractéristique.
2. $PN = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = MP$, et $\det(P) = 1$ donc P est inversible, donc $N = P^{-1}MP$. Donc M et N sont semblables et ont le même polynôme caractéristique.
Par le calcul du déterminant par blocs des matrices triangulaires :
$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_n - BA & -B \\ 0 & \lambda I_n \end{vmatrix} = \chi_{BA}(\lambda)\lambda^n$ et de même $\chi_N(\lambda) = \lambda^n \chi_{AB}(\lambda)$.
Ainsi $\chi_M(X) = \chi_N(X) = X^n \chi_{BA}(X) = X^n \chi_{BA}(X)$.
Donc en effectuant la division euclidienne par X^n,
$$\chi_M(X) = X^n \chi_{BA}(X) + 0 = X^n \chi_{BA}(X) + 0$$
et par unicité du quotient (et du reste ici nul) on a $\chi_{BA} = \chi_{BA}$.