Exercice 1 *Exemple de réduction d'endomorphismes*

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, f un endomorphisme de E et A la matrice de f dans la base canonique de E. Dans chacun des cas suivants, déterminer si f est diagonalisable, en précisant une base de chacun de ses sous-espaces propres.

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$; **2.** $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; **4.** $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution (**Ex.1 –** *Exemple de réduction d'endomorphismes*)

1. $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^3 - 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 2 = (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)$, $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 1, 2\}$, $\mathrm{E}_{-1} = \mathrm{Vect}((-2,1,2))$, $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}((-1,1,1))$, $\mathrm{E}_2 = \mathrm{Vect}((-2,1,1))$, f diagonalisable.
2. $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^3 - 4\mathrm{X}^2 + 5\mathrm{X} - 2 = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}-2)$, $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 2\}$, $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,0))$, $\mathrm{E}_2 = \mathrm{Vect}((-2,1,1))$, f diagonalisable.
3. $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^3 - 4\mathrm{X}^2 + 5\mathrm{X} - 2 = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}-2)$, $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 2\}$, $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}((-1,1,1))$, $\mathrm{E}_2 = \mathrm{Vect}((-2,1,1))$, f non-diagonalisable.

   Remarque : même polynôme caractéristique pour 2. & 3.
4. $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2+1)$, $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$, $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}((-1,0,1))$, f non-diagonalisable.

Exercice 2 *Commutant d'une matrice diagonale*

1. Soit $\mathrm{D} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux deux à deux distincts.

   Montrer que $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec D si, et seulement si, A est diagonale.
2. Soit λ et μ deux scalaires distincts et p et q deux entiers naturels non nuls.

   Déterminer les matrices commutant avec $\mathrm{D} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_p & 0 \\ \hline 0 & \mu \mathrm{I}_q \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.

Solution (**Ex.2 –** *Commutant d'une matrice diagonale*)

1. Dans ce qui suit, (i,j) décrit $[\![1\,;\, n]\!]^2$.
   Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Notons que $\mathrm{D} = (d_{i,j}) = (\lambda_i \delta_{i,j})$ où δ est le symbole de Kronecker.
   Par la définition du produit matriciel :
   $\mathrm{AD} = \mathrm{DA} \iff \forall (i,j), \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\lambda_k \delta k, j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \delta_{i,k} a_{k,j} \iff \forall (i,j), a_{i,j}\lambda_j = \lambda_i a_{i,j} \iff \forall (i,j), (\lambda_i - \lambda_j) a_{i,j} = 0 \iff \forall (i,j), (i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0) \iff$ A *diagonale*
2. Raisonnons par blocs. Soit $\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.

   $\mathrm{MD} = \mathrm{DM} \iff \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{A} & \mu \mathrm{B} \\ \hline \lambda \mathrm{C} & \mu \mathrm{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{A} & \lambda \mathrm{B} \\ \hline \mu \mathrm{C} & \mu \mathrm{D} \end{array}\right) \iff \begin{cases} (\mu - \lambda)\mathrm{B} = 0_{p,q} \\ (\lambda - \mu)\mathrm{C} = 0_{q,p} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{B} = 0_{p,q} \\ \mathrm{C} = 0_{q,p} \end{cases} \iff \mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{D} \end{array}\right)$ (diagonale par blocs).

Exercice 3 *Dans un espace de polynômes*

$\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré au plus 2.

Soit f l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, associe le polynôme défini par :

$$\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) + \mathrm{X}\mathrm{P}'(\mathrm{X})$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
2. Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
3. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$?

4. a) Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ?

b) Déterminer une base $\mathcal{C}$ de E formée de vecteurs propres de f.

c) Quelles sont les coordonnées du polynôme $Q(X) = X^2 + X + 1$ dans la base $\mathcal{C}$.

5. Déterminer le polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que :
$$P(X+1) + XP'(X) = X^2 + X + 1.$$

Solution (**Ex.3 –** *Dans un espace de polynômes*)

1. Pas de problème pour la linéarité.

2. $M = mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ où $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

3. $\text{rg}(f) = \text{rg}(M) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.

4. a) $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(M) = \{1; 2; 3\}$ puisque M est triangulaire. $f \in \mathcal{L}(E)$ et $card(\text{Sp}(f)) = 3 = \dim(E)$ donc f est diagonalisable.

b) La résolution de $f(P) = \lambda P$ donne : $E_1 = \text{Vect}(1)$, $E_2 = \text{Vect}(X+1)$ et $E_3 = \text{Vect}(2X^2 + 4X + 3)$. $\mathcal{C} = (1, X+1, 2X^2 + 4X + 3)$ convient.

c) En raisonnant sur les coefficients par degrés décroissants :
$X^2 + X + 1 = \dfrac{1}{2}(2X^2 + 4X + 3) - (X+1) + \dfrac{1}{2} \times 1$, les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans $\mathcal{C}$ sont $(1/2, -1, 1/2)$.

Exercice 4 *Sous espace propre de dimension n-1*

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 soit diagonalisable.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une valeur propre λ telle que $\dim E_\lambda = n - 1$ soit diagonalisable.

Solution (**Ex.4 –** *Sous espace propre de dimension n-1*)

1. $0 \in \text{Sp}(A)$ avec $\omega(0) \geq \dim \text{Ker}(A) = n - 1$, donc $\chi_A = X^{n-1}(X - \lambda) = X^n - \lambda X^{n-1}$, donc $\lambda = \text{Tr}(A)$.

Premier cas : $\text{Tr}(A) = 0$, $\chi_A = X^n$ et $\dim E_0 < \omega(0)$, A n'est pas diagonalisable.

Second cas : $\text{Tr}(A) \neq 0$, $\chi_A = X^{n-1}(X - \text{Tr}(A))$ et $\dim E_0 = \omega(0)$, $1 \leq \dim E_{\text{Tr}(A)} \leq \omega(1)$, donc $\dim E_{\text{Tr}(A)} = 1$, et A est diagonalisable.

2. $\chi_A = (X - \lambda)^{n-1}(X - \mu)$ avec éventuellement $\mu = \lambda$.
$\chi_A = (X^{n-1} - (n-1)\lambda X^{n-1} + \dots)(X - \mu) = X^n - \big((n-1)\lambda + \mu\big)X^{n-1} + \dots$

Premier cas : $\text{Tr}(A) = n\lambda$, donc $\mu = \lambda$, $\text{Sp}(A) = \{\lambda\}$ avec $\dim E_\lambda < \omega(\lambda)$, A n'est pas diagonalisable.

Second cas : $\text{Tr}(A) \neq n\lambda$, donc $\mu \leq \lambda$, $\text{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}$ avec $\dim E_\lambda = n-1$ et $\dim E_\mu = 1$, A est diagonalisable.

Notons que **1.** n'est qu'un cas particulier de ce cas.

Variante efficace – Quitte à plonger dans $\mathbb{C}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, A est semblable à
$$T = \begin{pmatrix} \lambda & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ avec } \mu = \text{Tr}(A) - (n-1)\lambda \in \mathbb{K}.$$

Premier cas : $\mu = \lambda$ (i.e. $\text{Tr}(A) = n\lambda$), $\text{Sp}(A) = \{\lambda\}$ et $\dim E_\lambda < n$ donc A n'est pas diagonalisable.

Second cas : $\mu \neq \lambda$ (i.e. $\text{Tr}(A) \neq n\lambda$), $\text{Sp}(A) = \{\lambda, \text{Tr}(A) - (n-1)\lambda\}$ et $\dim E_\lambda + \dim E_{\text{Tr}(A)-(n-1)\lambda} = n$ donc A est diagonalisable.

Exercice 5 *Matrice à deux paramètres*

Soit $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $|a| \neq |b|$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & a & \dots & b \\ b & a & b & \dots & a \\ a & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & \dots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$

1. A est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer une matrice diagonale semblable à A.

Solution (**Ex.5 –** *Matrice à deux paramètres*)

1. A est symétrique réelle donc diagonalisable.

2. $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ et $\dim \mathrm{E}_0 = 2n-2 = \omega(0)$ (car diagonalisable).
On note λ et μ les deux autres valeurs propres de A (et il n'est pas exclu que $\lambda = \mu$).
Comme A est diagonalisable, semblable à $diag(\lambda, \mu, 0, \ldots, 0)$, $\lambda + \mu = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = 2na$, donc $\mu = 2na - \lambda$.
Quelques idées pour trouver λ et μ :
• la somme des coefficients de chaque est constante, égale à $n(a+b)$ donc $\mathrm{A}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = n(a+b)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, donc $\lambda = n(a+b)$ est une valeur propre. Alors $\mu = n(a-b)$.
• En sommant les $2n$ lignes sur la première ligne, on obtient une factorisation :
$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{XI}_{2n} - \mathrm{A}) = (\mathrm{X} - n(a+b))\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \times & \times & & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \times & & \times \end{vmatrix}$$ donc $\lambda = n(a+b)$ est une racine de χ_{A} donc une valeur propre. $\mu = n(a-b)$ est l'autre.
• $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^2\right) = 2n^2(a^2+b^2)$, et comme A^2 est semblable à $diag(\lambda^2, \mu^2, 0, \ldots, 0)$, $\lambda^2 + \mu^2 = n^2(a^2+b^2)$.
On en tire : $\lambda\mu = \dfrac{1}{2}\big((\lambda+\mu)^2 - \lambda^2 - \mu^2\big) = n^2(a^2-b^2)$.
Donc λ et μ sont les racines du trinôme $\mathrm{X}^2 - 2na\mathrm{X} + n^2(a^2-b^2)$.
$\Delta = 4n^2b^2 = (2nb)^2 > 0$, $\lambda = n(a+b)$ et $\mu = n(a-b)$.
Bref, A est semblable à $diag\big(n(a+b), n(a-b), 0, \ldots, 0\big)$.

Exercice 6 *Sommes constantes en ligne ou en colonne*

1. Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice. On suppose que : $\forall i \in [\![1\,;\, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = s$.
Montrer que $s \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

2. En est-il de même si : $\forall j \in [\![1\,;\, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = s$?

3. Étudier si
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$
est diagonalisable. Si oui, proposer une matrice diagonale semblable à A.

Solution (**Ex.6 –** *Sommes constantes en ligne ou en colonne*)

1. Avec $\mathrm{U} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, on a $\mathrm{AU} = s\mathrm{U}$ donc $s \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{U} \in \mathrm{E}_s$.
Variante : $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A})$: on effectue $\mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \cdots + \mathrm{C}_n$ et on factorise la première colonne par $\mathrm{X}-s$, alors $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-s)\det(?)$, et s est racine de χ_{A}.

2. Cette fois, ${}^t\mathrm{A}$ vérifie la propriété de **1.**, donc $s \in \mathrm{Sp}({}^t\mathrm{A})$. Or $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}({}^t\mathrm{A})$ donc $s \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$. Donc $\dim(\mathrm{E}_0) + \dim(\mathrm{E}_{10}) = 4$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: A est diagonalisable.

3. $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 1$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ avec $\dim \mathrm{E}_0 = 3$. Par **2.**, $10 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$. Comme $\dim \mathrm{E}_{10} \ge 1$ et $\dim \mathrm{E}_0 + \dim \mathrm{E}_{10} \le 4$, $\dim \mathrm{E}_{10} = 1$.

Exercice 7 *Calculs explicites en dimension 3*
Pour les trois matrices suivantes, déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous-espaces propres, en précisant si elles sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, voire dans $\mathbb{C}$:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ \mathrm{N} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{L} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 6 & -12 & 5 \end{pmatrix}$$

Solution (**Ex.7 –** *Calculs explicites en dimension 3*)

- $\chi_{\mathrm{M}} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)^2$, $\mathrm{Sp(M)} = \{-1, 1\}$, $\mathrm{E}_{-1}(\mathrm{M}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$,

$\mathrm{E}_1(\mathrm{M}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, non diagonalisable, ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$.

- $\chi_{\mathrm{N}} = (\mathrm{X}-2)^2 \cdot (\mathrm{X}-1)$, $\mathrm{Sp(M)} = \{1, 2\}$, $\mathrm{E}_1(\mathrm{N}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$,

$\mathrm{E}_2(\mathrm{M}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$, diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

- $\chi_{\mathrm{L}} = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2+1) = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-i)(\mathrm{X}+i)$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{L}) = \{-1\}$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{L}) = \{-1, i, -i\}$, $\mathrm{E}_{-1}(\mathrm{L}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{E}_i(\mathrm{L}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1-i \\ 3-i \\ 6 \end{pmatrix}\right)$,

$\mathrm{E}_{-i}(\mathrm{L}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 3+i \\ 6 \end{pmatrix}\right)$, non diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$ *Matrice à un paramètre*

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, $n \geq 3$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \dots & \alpha \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \\ \alpha & \dots & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

i.e. $a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i \in \{1; n\}, \\ 1 & \text{si } i \in [\![2\,;\ n-2]\!]. \end{cases}$

Étudier, suivant la valeur de α, si A est diagonalisable, et préciser dans tous les cas ses éléments propres.

Solution (**Ex.8 –** *Matrice à un paramètre*)

$\mathrm{rg(A)} = n-1$ donc $0 \in \mathrm{Sp(A)}$ et $\dim \mathrm{E}_0 = n-1$.

De plus, $\mathrm{E}_0 = \mathrm{Vect}(\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2, \dots, \mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_n)$ où $(\mathrm{E}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Du coup $\omega(0) \geq n-1$ et $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X}-\lambda) = \mathrm{X}^n - \lambda \mathrm{X}^{n-1}$. Mais comme $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^n - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\,\mathrm{X}^{n-1} + \dots$, nécessairement $\lambda = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = 2\alpha + n - 2$.

- Premier cas : $\alpha = 1 - \dfrac{2}{n}$.

Alors $\lambda = 0$, $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^n$ et $\dim \mathrm{E}_0 < \omega(0)$: A n'est pas diagonalisable

- Second cas : $\alpha \neq 1 - \dfrac{n}{2}$, alors $\mathrm{Sp(A)} = \{0, 2\alpha + n - 2\}$ avec $\dim \mathrm{E}_{2\alpha+n-2} = 1$.

A est diagonalisable avec $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - (2\alpha + n - 2))$.

Enfin : $\mathrm{A}\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = (2\alpha + n - 2)\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{E}_{2\alpha+n-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}\right)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$ *Transposition et symétrie*

Soit $n \geqslant 2$, $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ défini par $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}^{\mathrm{T}} - \mathrm{M}$.

1. Calculer f^2 et en déduire que f est diagonalisable.

2. Déterminer les éléments propres de f.

3. Déterminer le polynôme caractéristique de f.

Solution (**Ex.9 –** *Transposition et symétrie*)

1. $f^2(\mathrm{M}) = (\mathrm{M}^{\mathrm{T}} - \mathrm{M})^{\mathrm{T}} - (\mathrm{M}^{\mathrm{T}} - \mathrm{M}) = 2\mathrm{M} - 2\mathrm{M}^{\mathrm{T}} = -2f(\mathrm{M})$ donc $f^2 = -2f$.

2. $\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}+2)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de f donc f est diagonalisable.

3. $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-2, 0\}$,
$f(\mathrm{M}) = 0 \iff \mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \mathrm{M} \iff \mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc $0 \in \mathrm{Sp}(f)$ et $\mathrm{E}_0 = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
$f(\mathrm{M}) = -2\mathrm{M} \iff \mathrm{M}^{\mathrm{T}} = -\mathrm{M} \iff \mathrm{M} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, donc $-2 \in \mathrm{Sp}(f)$ et $\mathrm{E}_{-2} = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

4. Comme f est diagonalisable,
$\omega(0) = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$,
$\omega(-2) = \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$,
$\chi_f = \mathrm{X}^{n(n+1)/2}(\mathrm{X}+2)^{n(n-1)/2}$.

Exercice 10 *Polynôme annulateur*

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{A} + 3\mathrm{I}_5 = 0_5$ et $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = 9$.
Déterminer χ_{A}.

Solution (**Ex.10 –** *Polynôme annulateur*)

$\mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 3 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-3)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples A donc A est diagonalisable, avec $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \{1, 3\}$.
On a alors $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \lambda \times \omega(\lambda) = 9$, la seule possibilité étant $\omega(3) = 2$ et $\omega(1) = 3$ puisque $\omega(1) + \omega(3) = 5$.
Donc $\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-1)^3(\mathrm{X}-3)^2$.

Exercice 11 *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit n un entier au moins égal à 2. Soit $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $\varphi : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{I}_n$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.

2. Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + (n-2)\mathrm{X} + 1 - n$. Calculer $\mathrm{P}(\varphi)$.

3. Justifier que φ est diagonalisable et donner une matrice diagonale représentant φ dans une base idoine.

4. En déduire $\mathrm{Tr}\,(\varphi)$ et $\det\,(\varphi)$.

Solution (**Ex.11 –** *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*)

1. Aucun souci grâce à la linéarité de la trace.

2. Pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$\varphi^2(\mathrm{M}) = \varphi(\mathrm{M}) - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\varphi(\mathrm{I}_n) = \mathrm{M} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{I}_n - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,(1-n)\mathrm{I}_n = \mathrm{M} + (n-2)\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{I}_n$.
$\mathrm{P}(\varphi)(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + (n-2)\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{I}_n + (n-2)\mathrm{M} - (n-2)\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{I}_n + (1-n)\mathrm{M}$,
i.e. $\mathrm{P}(\varphi)(\mathrm{M}) = 0_n$.
Donc $\mathrm{P}(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$.

3. $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-(1-n))(\mathrm{X}-1)$ est un polynôme annulateur de φ scindé à racines simples donc φ est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{1-n, 1\}$.
$\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \iff \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0 \iff \mathrm{M} \in \ker(\mathrm{Tr})$ donc $1 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$ et $\dim(\mathrm{E}_1) = \dim(\ker(\mathrm{Tr})) = n^2 - 1$ par la fomule du rang appliquée à $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
Comme φ est diagonalisable et $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$, cela suffit pour affirmer que $1-n \in \mathrm{Sp}(\varphi)$ et $\dim(\mathrm{E}_{1-n}) = 1$.
Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la supplémentarité $\mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_{1-n} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n^2-1\ fois}, 1-n).$$

4. $\mathrm{Tr}\,(\varphi) = n^2 - 1 + 1 - n = n^2 - n$ et $\det\,(\varphi) = 1 - n$.

Exercice 12 *Puissances n-èmes et trigonalisation*

Soit
$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -8 & -1 & -4 \\ -12 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer χ_{M} et étudier si M est diagonalisable.

2. a) M est-elle trigonalisable ?

b) Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les de la première ligne valent 1 et telle que

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On appelle T cette matrice.

3. a) Justifier l'existence de trois matrices A, B et C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}^n = \mathrm{A} + (-1)^n \mathrm{B} + n\mathrm{C}.$$

b) Déterminer A, B et C en fonction I_3, M et M^2.

Solution (**Ex.12 –** *Puissances n-èmes et trigonalisation*)

1. $\chi_{\mathrm{M}} = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1 = (\mathrm{X}-1)^2 \cdot (\mathrm{X}+1)$

mais $\dim \mathrm{E}_1 = 3 - \mathrm{rg}(\mathrm{M} - \mathrm{I}_3) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -8 & -2 & -4 \\ -12 & -4 & -6 \end{pmatrix} = 1$

2. a) M est trigonalisable car χ_{M} est scindé.

b) $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. a) Récurrence ou Newton : ${}^q qn \in \mathbb{N}, \mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{A}' + (-1)^n\mathrm{B}' + \mathrm{C}'n$ avec $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}'$ adéquates.
Alors $\mathrm{M}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{A} + (-1)^n\mathrm{B} + \mathrm{C}n$ où $\mathrm{A} = \mathrm{PA}'\mathrm{P}^{-1}$ etc.

b) On peut calculer $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ à l'aide de P^{-1}.
On peut aussi remarquer :
$n = 0 \Longrightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{I}_3$,
$n = 1 \Longrightarrow \mathrm{A} - \mathrm{B} + \mathrm{C} = \mathrm{M}$,
$n = 2 \Longrightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} + 2\mathrm{C} = \mathrm{M}^2$.
D'où : $\mathrm{C} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{M}^2 - \mathrm{I}_3)$, etc...

Exercice 13 *Trigonalisation et nilpotence*

1. Soit

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Étudier la diagonalisabilité de M.

b) Justifier que M est trigonalisable et déterminer une matrice de passage P telle que

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{T}.$$

c) Justifier que M est nilpotente d'indice 3.

d) Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{M}) = \{0\}$, alors M est nilpotente.

2. a) Étudier la diagonalisabilité de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, puis dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

b) La propriété démontrée en 1.d) demeure-t-elle en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

Solution (**Ex.13 –** *Trigonalisation et nilpotence*)

1. $\chi_{\mathrm{M}} = \mathrm{X}^3$, $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) = \{0\}$ mais $\dim \mathrm{E}_0 = \dim \mathrm{K}er\mathrm{M} = 1$: non diagonalisable.

$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

$T^2 \neq 0$, $T^3 = 0$ donc $M^2 \neq 0$ mais $M^3 = 0$: M nilpotente d'indice 3.
Pour 1.d), dans $\mathbb{C}$, M est trigonalisable et il existe P telle que

$$T = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & \times & \\ \times & & 0 \\ 0 & \times & \end{pmatrix} 000$$

car $\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}(M) = \{0\}$.
Alors $T^3 = 0$, donc $M^3 = 0$.

2. $\chi_A = X(X^2+1) = X(X-i)(X+i)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ mais est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais l'est dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1.d) est fausse dans $\mathbb{R}$. On a : $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc : $\forall n \in \mathbb{N}, A^{4n} = (A^4)^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$... aucune puissance de A n'est nilpotente.

$\boxed{\textbf{Exercice 14}}$ *Commutant*

Soit

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que M est diagonalisable, en précisant une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que

$$D = P^{-1}MP$$

Pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note

$$\mathcal{C}(A) \overset{\text{déf.}}{=} \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / AB = BA\}$$

son *commutant*.

2. a) Montrer que, pour tout A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, $\mathcal{C}(A)$ est un espace vectoriel.
b) Déterminer $\mathcal{C}(D)$ en précisant sa dimension et en donnant une base de ses bases. *On pourra commencer par raisonner par blocs.*
c) En déduire la dimension ainsi qu'une base de $\mathcal{C}(M)$.

3. Que vaut D^2 ? Que peut-on en déduire pour l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à M.

Solution (**Ex.14 –** *Commutant*)

1. $\chi_M = X^3 - X^2 - X + 1 = (X-1)^2 \cdot (X+1)$

Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}MP = D$.

2. a) Laissée au lecteur.

b) Soit $N = \begin{pmatrix} \alpha & A \\ B & C \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

$ND = \begin{pmatrix} -\alpha & A \\ -B & C \end{pmatrix}$, $DN = \begin{pmatrix} -\alpha & -A \\ B & C \end{pmatrix}$

$$\mathrm{ND} = \mathrm{DN} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = -\mathrm{A} \\ \mathrm{B} = -\mathrm{B} \end{cases} \Longleftrightarrow \mathrm{A} = 0, \mathrm{B} = 0.$$

Donc $\mathcal{C}(\mathrm{D}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \mathrm{C} \end{pmatrix} / \mathrm{C} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \right\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{E}_{1,1}, \mathrm{E}_{2,2}, \mathrm{E}_{2,3}, \mathrm{E}_{3,2}, \mathrm{E}_{3,3})$

c) $\mathrm{A} \in \mathcal{C}(\mathrm{M}) \Longleftrightarrow \mathrm{AM} = \mathrm{MA} \Longleftrightarrow \mathrm{P}^{-1}\mathrm{APD} = \mathrm{DP}^{-1}\mathrm{AP} \Longleftrightarrow \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \in \mathcal{C}(\mathrm{D}) \Longleftrightarrow \mathrm{A} \in \left\{ \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1} / \Delta \in \mathcal{C}(\mathrm{D}) \right\}$
Donc $\mathcal{C}(\mathrm{M}) = \mathrm{Vect}\big((\mathrm{PEP}^{-1})_{\mathrm{E} \in \{\mathrm{E}_{1,1}, \mathrm{E}_{2,2}, \mathrm{E}_{2,3}, \mathrm{E}_{3,2}, \mathrm{E}_{3,3}\}}\big)$
Et $\dim(\mathcal{C}(\mathrm{M})) = 5$.

3. $\mathrm{D}^2 = \mathrm{I}_3$ donc $\mathrm{M}^2 = \mathrm{PD}^2\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{I}_3$ donc l'endomorphisme φ associé à M vérifie $\varphi^2 = id$, donc est une symétrie (d'axe E_1 et de direction E_{-1}).

Exercice 15 *Racines carrées*

Soit

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M est diagonalisable, en précisant une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$$

2. a) Soit $\mathrm{R} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. On pose $\Delta = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{RP}$.
Montrer que $\mathrm{R}^2 = \mathrm{M} \Longrightarrow \big(\Delta^2 = \mathrm{D} \text{ et } \Delta\mathrm{D} = \mathrm{D}\Delta\big)$.

b) Combien l'équation $\mathrm{R}^2 = \mathrm{M}$ d'inconnue R a-t-elle de solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Solution **(Ex.15 –** *Racines carrées***)**

1. $\chi_\mathrm{M} = \mathrm{X}^3 - 2 \cdot \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 2 = (\mathrm{X} - 2) \cdot (\mathrm{X} - 1) \cdot (\mathrm{X} + 1)$.

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. a) $\mathrm{R}^2 = \mathrm{M} \Longrightarrow \mathrm{P}^{-1}\mathrm{R}^2\mathrm{P} = \mathrm{D} \Longrightarrow \Delta^2 = \mathrm{D}$, puis $\Delta^2 = \mathrm{D} \Longrightarrow \Delta\mathrm{D} = \Delta^3 = \Delta^2\Delta = \mathrm{D}\Delta$.

b) $\mathrm{D}\Delta = \Delta\mathrm{D} \Longrightarrow \Delta$ diagonale car D est diagonale à valeurs propres 2 à 2 distinctes.
On pose $\Delta = diag(a, b, c)$. $\Delta^2 = \mathrm{D} \Longleftrightarrow (a^2 = 1, b^2 = 2, c^2 = -1)$.
• Il n'y a pas de solution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
• Dans $\mathbb{C}$, $\Delta^2 = \mathrm{D}$ admet les 8 solutions $\Delta = diag(\pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm i)$. Donc $\mathrm{R}^2 = \mathrm{M}$ a exactement 8 solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$: $\mathrm{R} = \mathrm{P}\Delta^i nv\mathrm{P}$ où $\Delta^2 = \mathrm{D}$.

Exercice 16 *Racines carrées d'endomorphismes diagonalisables*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E.

On suppose que u possède n valeurs propres distinctes deux à deux.

1. u est-il diagonalisable ?
Dans la suite, on note $\mathcal{B}$ une base de E formée de vecteurs propres de u et D la matrice représentant u dans $\mathcal{B}$.

2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

a) Montrer qu'il existe un endomorphisme v de E tel que $v^2 = u$. Un tel endomorphisme est parfois appelé « *racine carrée de u* ». Rien ne dit qu'il soit unique.

b) Montrer qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $v = \mathrm{P}(u)$.

c) Soit $\mathrm{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{R}^2 = \mathrm{D}$. Une telle matrice est appelée « *racine carrée de D* ».
Montrer que R et D commutent et en déduire le nombre de racines carrées de D.

d) Combien existe-t-il d'endomorphismes v tels que $v^2 = u$?

3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

a) À quelle condition *sine qua non* u possède-t-il au moins une racine carrée ?

b) On suppose que u possède au moins une racine carrée. Combien en possède-t-il ?

4. On note λ_i pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ les n valeurs propres de u et E_i les sous-espaces propres associés respectivement.
Pour tout i de $[\![1\,;\,n]\!]$, on note p_i le projecteur de E sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} \mathrm{E}_j$.

a) Justifier que
$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$$

b) Justifier que la famille $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les scalaires $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ pour que
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i p_i\right)^2 = u.$$

5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à
$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que u est diagonalisable.

b) On note $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ les valeurs propres de u et E_i le sous-espace propre associé à i pour $1 \leqslant i \leqslant 3$.
Expliciter une matrice Q inversible telle que $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQ} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et calculer Q^{-1}.

c) Déterminer les racines carrées du M en distinguant les cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

d) Pour chaque racine carrée v du u, donner un polynôme P de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $v = \mathrm{P}(u)$. On exprimera ces polynômes dans une base de Lagrange bien choisie que l'on explicitera.

e) Pour tout i de $[\![1\,;\,n]\!]$, déterminer la matrice P_i représentant dans la base canonique $\mathcal{C}$ le projecteur p_i de E sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} \mathrm{E}_j$.

f) Pour chaque racine carrée v de u, exprimer v à l'aide des projecteurs p_i.

Solution (**Ex.16 –** *Racines carrées d'endomorphismes diagonalisables*)

1. u est diagonalisable car $\mathcal{C}ard(\mathrm{Sp}(u)) = \dim(\mathrm{E})$.
Dans la suite, on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u et $\mathrm{D} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la matrice représentant u dans $\mathcal{B}$.

2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

a) Soit v l'endomorphisme de E défini par : $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], v(e_i) = \mu_i e_i$ où μ_i est un complexe vérifiant $\mu_i^2 = \lambda_i$.
Alors : $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], v^2(e_i) = \mu_i^2 e_i = \lambda_i e_i = u(e_i)$.
v^2 et u coïncident sur la base $\mathcal{B}$ donc sont égaux.

b) Par le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe un polynôme de degré au plus $n-1$ tel que : $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \mathrm{P}(\lambda_i) = \mu_i$.
Comme pour tout i de $[\![1\,;\,n]\!]$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$, $\mathrm{P}(u)(e_i) = \mathrm{P}(\lambda_i)e_i = \mu_i e_i = v(e_i)$.
Donc $\mathrm{P}(u) = v$.

c) $\mathrm{RD} = \mathrm{R}^3 = \mathrm{DR}$, donc les valeurs propres de D étant deux à deux distinctes, R est diagonale. En notant $\mathrm{R} = diag(\mu_1, \ldots, \mu_n)$,
$$\mathrm{R}^2 = \mathrm{D} \iff \forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \mu_i^2 = \lambda_i.$$
Tout complexe non nul ayant exactement 2 racines carrées distinctes, et 0 n'en ayant qu'une, le nombre de racines carrées de D est 2^n si $0 \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{D})$ et 2^{n-1} si $0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{D})$.

d) Comme $v^2 = u \iff \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)^2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \iff \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)^2 = \mathrm{D}$, le nombre de racines carrées de u est 2^n si $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$ et 2^{n-1} si $0 \in \mathrm{Sp}(u)$.

3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

a) u possède une racine carrée si, et seulement si, chaque valeur propre de u possède une racine carrée au moins, donc si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives.

b) u possède au moins une racine carrée, donc ses valeurs propres sont toutes positives. La réponse est alors identique à 2.d).

4. a) Je propose ci-après une solution sans utiliser les matrices **mais il serait plus efficace d'utiliser les matrices représentant les endomorphismes dans $\mathcal{B}$! ! !** En effet, on a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p_i) = \mathrm{E}_{i,i}$, matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du i-ème coefficient de la diagonale qui vaut 1. Les questions se résument alors à des calculs sur les matrices diagonales.

Comme : $\forall j \in [\![1\,;\,n]\!], \mathrm{E}_j = \mathrm{Vect}(e_j)$, par définition des p_i, $p_i(e_j) = \begin{cases} e_i & \text{si } i = j \\ 0_\mathrm{E} & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Alors : $\forall j \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i(e_j) = \lambda_j e_j = u(e_j)$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i = u$,

et : $\forall i \neq j, p_i \circ p_j(e_k) = \begin{cases} p_i(e_j) = 0_\mathrm{E} & \text{si } k = j \\ p_i(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E} & \text{si } k \neq j \end{cases}$, donc $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

b) Supposons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$. En évaluant ces endomorphismes en e_j, on obtient $\alpha_j e_j = 0_\mathrm{E}$, avec $e_j \neq 0_\mathrm{E}$, donc $\alpha_j = 0$. La famille (p_i) est libre.

c) En développant avec $p_i \circ p_j = \begin{cases} p_i & \text{si } i \neq j \\ 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})} & \text{si } i \neq j \end{cases}$, $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i p_i\right)^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 p_i$,

et comme la famille (p_i) est libre,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i p_i\right)^2 = u \iff \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \iff \forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \mu_i^2 = \lambda_i$$

5. a) $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(\mathrm{M}) = \{-1, 0, 1\}$, u est diagonalisable car possédant $\dim(\mathrm{E})$ valeurs propres distinctes.

b) En déterminant les vecteurs propres de M, $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient

(ce n'est pas la seule) et $\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) • Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, M n'a aucune racine carrée.

• Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, M possède exactement 4 racines carrées :

$$\mathrm{R} = \mathrm{Q}\begin{pmatrix} \pm i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ -b & -a-b & b \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} a = \pm i \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

d) La base de Lagrange pour les points -1, 0, 1 est $\mathrm{L}_{-1} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X})$, $\mathrm{L}_0 = -\mathrm{X}^2 + 1$ et $\mathrm{L}_1 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X})$.
Les racines carrées de M sont alors

$$a\mathrm{L}_{-1}(\mathrm{M}) + b\mathrm{L}_1(\mathrm{M}) = \frac{1}{2}\left((a+b)\mathrm{M}^2 - (a-b)\mathrm{M}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ -b & -a-b & b \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} a = \pm i \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

e) Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de p_1 est $\mathrm{E}_{1,1}$ car p_1 est le projecteur sur $\mathrm{Vect}(e_1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. Donc

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{Q}\mathrm{E}_{1,1}\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De même

$$\mathrm{P}_2 = \mathrm{Q}\mathrm{E}_{2,2}\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{P}_3 = \mathrm{Q}\mathrm{E}_{3,3}\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

f) $v = ap_1 + bp_3$ avec $a \in \{-i, i\}$ et $b \in \{-1, 1\}$, et on retrouve les matrices racines carrées de M

$$\mathcal{M}_\mathcal{C}(v) = \begin{pmatrix} 0 & -2a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ -b & -a-b & b \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} a = \pm i \\ b = \pm 1 \end{cases}$$