Exercice 1 *Déterminants élémentaires*

Calculer sous forme factoriser

1. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$; **2.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$; **3.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$.

Solution (**Ex.1 –** *Déterminants élémentaires*)

1. $2abc$.
2. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca))$.
3. $abc(a-b)(a-c)(b-c)$.

Exercice 2 *Par récurrence*

Calculer par récurrence les déterminants suivant

1. $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$; **2.** $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$

Solution (**Ex.2 –** *Par récurrence*)

1. $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_n$ conduit à
   $D_n = D_{n-2}$ et
   $D_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$
2. $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_n$ conduit à
   $D_n = -2D_{n-1} - D_{n-2}$ et
   $D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$.

Exercice 3 *Tridiagonal*

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1+z^2 & z & & (0) \\ z & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & z \\ (0) & & z & 1+z^2 \end{vmatrix}_{[n]}$.

Solution (**Ex.3 –** *Tridiagonal*)

En développant suivant la première colonne puis la première ligne (stratégie tridiagonale) :
$D_n = (1+z^2)D_{n-1} - z^2 D_{n-2}$.
Notons que cette relation est encore vérifiée pour $n = 0$ en prenant $D_0 = 1$, car $D_1 = 1+z^2$ et $D_2 = (1+z^2)^2 - z^2$.
Suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :
$x^2 - (1+z^2)x + z^2 = 0$, de racines 1 et z^2.
• Premier cas : $z^2 \neq 1$.
Il existe a et b dans $\mathbb{C}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, D_n = a + bz^{2n}$.
Avec D_0 et D_1, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, D_n = \dfrac{1-z^{2n+2}}{1-z^2}$.
• Second cas : $z^2 = 1$.
Il existe a et b dans $\mathbb{C}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, D_n = a + bn$.
Avec $D_0 = 1$ et $D_1 = 2$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, D_n = 1 + n$.

Exercice 4 *Déterminant tridiagonal*

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ et $D_n(\theta)$ le déterminant d'ordre n :

$$D_n(\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D_n(\theta) = \frac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta}.$$

Solution (**Ex.4 –** *Déterminant tridiagonal*)
$D_0(\theta) = 1 = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$ (produit vide, ou convention),
$D_1(\theta) = 2\cos\theta = \dfrac{\sin(2\theta)}{\sin\theta}$,
$D_2(\theta) = 4\cos^2\theta - 1 = \dfrac{\sin(3\theta)}{\sin\theta}$
car $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin\theta\big(3 - 4\sin^2\theta\big) = \sin\theta\big(4\cos^2\theta - 1\big)$.
En développant par rapport à la 1ère colonne,

$$D_{n+2}(\theta) = 2\cos\theta D_{n+1}(\theta) - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la 1ère ligne,
$$D_{n+2}(\theta) = 2\cos\theta D_{n+1}(\theta) - D_n(\theta).$$
Avec les valeurs initiales, cette relation est vraie dès $n = 0$.
L'équation caractéristique associée par la relation linéaire de la suite $(D_n(\theta))$ est $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$.
Ses solutions sont $e^{\pm in\theta}$ et il existe α et β réels tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D_n(\theta) = \alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta).$$
Avec $n = 0$: $\alpha = 1$.
Avec $n = 1$: $\cos\theta + \beta\sin\theta = 2\cos\theta \Rightarrow \beta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad D_n(\theta) = \cos(n\theta) + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin(n\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$

Exercice 5 *Déterminant de sommes*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} i$.

Calculer $\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \dots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \end{vmatrix}_{[n]}$.

Solution (**Ex.5 –** *Déterminant de sommes*)
En effectuant successivement $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$,..., $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, ce déterminant vaut $n!$.

Exercice 6 *Déterminant et racines n-ièmes de l'unité*

Soit $n \geq 2$, $a \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & a & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & a \\ a & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. Calculer $\det(M)$.
2. Déterminer le rang de M en fonction de a.

Solution (**Ex.6 –** *Déterminant et racines n-ièmes de l'unité*)

1. En décomposant la première colonne :
$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & a & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & a \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & a \\ a & & & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1}a^n.$$
2. $\det(M) = 0 \Leftrightarrow (-a)^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0\,;\,n-1]\!], a = -e^{2ik\pi/n}$.

Dans ce cas, M_a possède une matrice extraite $\begin{pmatrix} 1 & a & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & a \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{[n-1]}$ de rang $n-1$ donc est au moins de rang $n-1$.

Finalement :
$\operatorname{rg}(M_a) = \begin{cases} n-1 & \text{si } \exists k \in [\![0\,;\, n-1]\!], a = -e^{2ik\pi/n}, \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 7 *Matrices antisymétriques*

Soit A une matrice antisymétrique d'ordre $2n+1$. Montrer que $\det(A) = 0$.
En est-il de même pour une matrice antisymétrique d'ordre pair ?

Solution (**Ex.7 –** *Matrices antisymétriques*)

$\det(A) = \det\left(A^T\right) = \det(-A) = (-1)^{2n+1}\det(A) = -\det(A)$ donc $\det(A) = 0$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est un contre-exemple si l'ordre est pair...

Exercice 8 *Inverse d'une matrice triangulaire par blocs*

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M est inversible si, et seulement si, A et C le sont.
2. Dans ce cas, écrire M^{-1} par blocs.

Solution (**Ex.8 –** *Inverse d'une matrice triangulaire par blocs*)

1. $\det(M) = \det(A)\det(()C)$ donc
$$\left(\det(M) \neq 0\right) \Leftrightarrow \left(\det(A) \neq 0 \qquad texte t \det(()C) \neq 0\right),$$
ce qui se traduit par M est inversible si, et seulement si, A et C le sont.
2. On pourra chercher $M^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, ou on méditera avec profit sur la propriété : l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire (penser à la résolution d'un système linéaire du type $TX = 0$...)
$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} = I_{n+p}$

Exercice 9 *Déterminant et blocs*

Soit $(A, B, C, D) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^4$ tel que $D \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $CD = DC$.

Montrer que : $\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC)$.

Solution (**Ex.9 –** *Déterminant et blocs*)

On cherche à trouver des relations entre matrices triangulaires par blocs, par exemple :
$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ? & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & 0 \\ ? & AD - BC \end{pmatrix}$.
En prenant le premier « ? » égal à I_n :
$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & AD - BC \end{pmatrix}$.

Alors $\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) \times \det(A) = \det(A)\det(()AD - BC)$.

Et puisque $\det(A) \neq 0$, $\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(()AD - BC)$.

Exercice 10 *Déterminant et Pascal*

Soit $n \geq 2$. Calculer :

$$D_n \overset{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \dots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \ddots & 0 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1}\dots & \dots & \binom{n}{n-1} & \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Solution (**Ex.10 –** *Déterminant et Pascal*)

En retranchant, à partir de la seconde ligne sa précédente, et par la formule de Pascal, on obtient :

$$D_n \overset{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \binom{n-1}{n-1} \\ 0 & \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-2} \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Comme $\binom{k}{k} = 1$ $(\forall k)$, en développant par rapport à la première colonne, $D_n = D_{n-1}$.

Donc : $\forall n \geq 2, D_n = D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

Exercice 11 *Matrices de Vandermonde et polynômes*

Dans cet exercice, on *retrouve* le déterminant de Vandermonde par une autre méthode que celle du cours, utilisant des polynômes. Soit n un entier naturel supérieur à 2 et $a_1, \dots, a_n$ n nombres complexes. Soit

$$V(a_1, \dots, a_n) \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. *Inversibilité*

   a) Soit $B \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En considérant le polynôme $P \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i$, montrer que le système linéaire :
   $$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow V(a_1, \dots, a_n)B = 0$$
   d'inconnue B admet une unique solution si, et seulement si,
   $$\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2, \quad (i \neq j) \Rightarrow (a_i \neq a_j)$$
   .

   b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $V(a_1, \dots, a_n)$ soit inversible.

2. *Déterminant*

   On suppose désormais les a_i deux à deux distincts.

   a) Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que $f(x) \overset{\text{déf}}{=} \det\big(\big(V(a_1, \dots, a_n, x)\big)\big)$ est une expression polynomiale de degré n et de coefficient dominant $\det(V(a_1, \dots, a_n))$.

   b) Quelles sont les racines de f ? En déduire par récurrence l'expression du déterminant de Vandermonde d'ordre n.

3. *Interpolation de Lagrange*

   Soit $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ $n+1$ scalaires de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et $(y_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ $n+1$ scalaires quelconques de $\mathbb{K}$. En utilisant le déterminant de Vandermonde, montrer que le problème d'interpolation de Lagrange :
   $$\exists P_n \in \mathbb{K}_n[X], \quad \forall i \in [\![0 \,;\, n]\!], \quad P_n(a_i) = y_i$$
   possède une unique solution.

Solution (**Ex.11 –** *Matrices de Vandermonde et polynômes*)

1. *Inversibilité*

 a) Soit $B \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En considérant le polynôme $P \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i$,

 montrer que le système linéaire :
$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow VB = 0$$
 d'inconnue B est de Cramer si, et seulement si,
$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2, \quad (i \neq j) \Rightarrow (a_i \neq a_j)$$
 .

 • Si : $\exists i \neq j, a_i = a_j$, alors

 $\mathrm{rg}\Big(V(a_1,\ldots,a_n)\Big) < n$ et $(\mathcal{S})$ n'est pas de Cramer.

 • Si : $\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2, \quad (i \neq j) \Rightarrow (a_i \neq a_j)$, alors
$$(\mathcal{S}) \Rightarrow \forall i \in [\![1\,;\, n]\!], P(a_i) = 0 \Rightarrow P = 0 \Rightarrow B = 0$$
 car P admet au moins n racines distinctes et $\deg(P) < n$. Donc $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer.

 b) $V(a_1,\ldots,a_n)$ est inversible si, et seulement si, les (a_i) sont deux à deux distincts.

2. *Déterminant*

 Jusqu'à la fin de cette question, on suppose désormais les a_i deux à deux distincts.

 a) En développant $V(a_1,\ldots,a_n,x)$ par rapport à sa dernière ligne, on observe que $f(x)$ est une expression polynomiale de degré n et de coefficient dominant $\det(()V(a_1,\ldots,a_n))$.

 b) $\forall i \in [\![1\,;\, n]\!], f(a_i) = 0$ donc les racines de f sont exactement les n nombres $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ (racines simples deux à deux distinctes).

 On a alors, en factorisant f :

 $\det(()V(a_1,\ldots,a_n,x)) = \det(()V(a_1,\ldots,a_n))(x-a_1)\ldots(x-a_n)$.

 On pourra remarquer que cette relation reste vraie si deux (au moins) des a_i sont égaux.

 Une récurrence sans difficulté montre qu'alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \det(()V(a_1,\ldots,a_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$