Les exercices sont indépendants – Durée : 4 heures

Les calculatrices et téléphones sont interdits.

Solution (**Ex.1 –** *Polynômes de Hilbert*)

1. Aucun souci.

2. a) $(X+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i = X^k + kX^{k-1} + \dots$

On a alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta(X^k) = kX^{k-1} + \dots$ et $\deg(\Delta(X^k)) = k-1$.

Et par linéarité, on écrivant $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$:

$\Delta(P) = a_d d X^{d-1} + Q$ avec $\deg(Q) \leqslant d-2$, donc $\deg(\Delta(P)) = d-1 = \deg(P)-1$.

b) Et si P est constant, $P(X+1) = P(X)$ et $\deg(\Delta(P)) = \deg(0) = -\infty$.

c) Soit $P \in E_n$. Comme $\Delta \in \mathcal{L}(E)$, $\Delta(P) \in E$. Et comme $\deg(P) \leqslant n$, $\deg(\Delta(P)) \leqslant n-1$, donc $P \in E_n$ et E_n est stable par Δ.

3. a) Puisque chaque application de Δ diminue le dégré d'une unité, $\deg((\Delta_n)^n(X^n)) = n-n = 0 \neq -\infty$ donc $(\Delta_n)^n(X^n) \neq 0$ donc $(\Delta_n)^n \neq 0$.

Pour la même raison, si $P \in E_n$, $\deg((\Delta_n)^{n+1}(P)) \leqslant n-(n+1) \leqslant -1$ donc $(\Delta_n)^{n+1}(P) = 0$, et $(\Delta_n)^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E_n)}$

b) • Si $\deg(P) \geqslant 1$, $\deg(\Delta_n(P)) \geqslant 0$ donc $\Delta_n(P) \neq 0$. Mais si P est constant, $\Delta_n(P) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{R}_0[X]$.

• par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(\Delta_n) = \dim(E_n) - \dim(\mathrm{Ker}(\Delta_n)) = n+1-1 = n$.

• Toujours en raison des degrés, si $P \in E_n$, alors $\Delta_n(P) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc $\mathrm{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et par égalité des dimensions, $\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

4. a) Pour tout polynôme P, $\deg(\mathcal{T}(P)) = \deg(P)$.

b) $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{T}^k(P) = P(X+k)$.

c) Et si la formule précédente avait encore un sens pour $k=-1$?

Posons $\mathcal{U} : P \longmapsto P(X-1)$. Alors clairement

$\mathcal{T} \circ \mathcal{U}(P) = \mathcal{T}(P(X-1)) = P(X)$ et $\mathcal{U} \circ \mathcal{T}(P) = \mathcal{U}(P(X+1)) = P(X)$.

Donc $\mathcal{T}$ est bijectif et $\mathcal{U} = \mathcal{T}^{-1}$: $\mathcal{T}$ est un automorphisme de E et $\mathcal{T}^{-1}(P) = P(X-1)$ pour tout polynôme P.

d) Par conservation du degré lorsqu'on applique $\mathcal{T}$, E_n est stable par $\mathcal{T}$.

5. Toujours par conservation du degré, $\mathrm{Ker}(\mathcal{T}_n) = \{0\}$, donc $\mathcal{T}$ est injectif. Et comme E_n est de dimension finie, l'endomorphisme $\mathcal{T}_n$ est un automorphisme. Donc $\mathrm{Im}(\mathcal{T}) = E_n$ et $\mathrm{rg}(\mathcal{T}_n) = n+1$.

6. $\delta(X) = 1$, $\delta(X^2) = 2X+1$, $\delta(X^3) = 3X^2+3X+1$, $\delta(X^4) = 4X^3+6X^2+4X+1$,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

7. $\dim(\mathrm{Im}(\delta)) = \mathrm{rg}(\delta) = \mathrm{rg}(D) = 4 = \dim(E_3)$ donc δ est surjectif. Comme $\dim(F) = \dim(E_3)$, δ est un isomorphisme.

8. On note π l'isomorphisme réciproque de δ : $\pi = \delta^{-1}$.

On pose $H_0 = 1$, et pour i dans $[\![1\,;\,3]\!]$, $H_i = \pi^i(H_0)$.

a) Puisque $P = \delta(\pi(P))$, $\deg(P) = \deg(\pi(P)) - 1$ donc $\deg(\pi(P)) = \deg(P)+1$.

b) $\deg(H_0) = 0$, $\deg(H_1) = \deg(\pi(H_0)) = 0+1 = 1$, $\deg(H_2) = \deg(\pi(H_1)) = 1+1 = 2$ et $\deg(H_3) = \deg(\pi(H_2)) = 2+1 = 3$, donc $\mathcal{H}$ est une famille de quatre polynômes échelonnée en degré de $E_3 = \mathbb{R}_3[X]$, donc est une base de E_3.

c) $\Delta(H_0) = 0$, et pour tout i de $[\![1\,;\,3]\!]$, $\Delta(H_i) = \delta(\pi(H_{i-1})) = H_{i-1}$.

Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}(\Delta_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, magnifique matrice nilpotente d'ordre 4 comme prévu par la question 3.

9. a) Comme $\pi = \delta^{-1}$, la matrice représentant π est l'inverse de la matrice représentant δ dans les bases idoines.

$$\Pi = D^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $H_1 = \pi(H_0)$ donc en notant $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ la colonne représentant H_0 dans $\mathcal{C}$ et W_1 celle représentant H_1 dans $\mathcal{B}$, on a :

$W_1 = \Pi V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $H_1 = X$, et $V_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(H_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Avec les mêmes notations

$$W_2 = \Pi V_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } H_2 = -X/2 + X^2/2, \text{ et } V_2 = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(H_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$W_3 = \Pi V_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } H_3 = X/3 - X^2/2 + X^3/6.$$

Variante : On peut chercher $H_1 = aX$ car de degré 1 dans F tel que $H_1(X+1) - H_1(X) = 1$, i.e. $aX + a - aX = 1$, donc $a = 1$ et $H_1 = X$. Et on recommence avec $H_2 = aX + bX^2$ vérifiant $H_2(X+1) - H_2(X) = X$, etc.

c) $H_2 = \dfrac{X(X-1)}{2}$ et $H_3 = \dfrac{X^3 - 3X^2 + 2X}{6} = \dfrac{X(X^2 - 3X + 2)}{6} = \dfrac{X(X-1)(X-2)}{6}$.

10. a) La famille $(H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille échelonnée en degré, de 0 à n, de E_n donc est une base de E_n.

b) $\Delta(H_k) = \dfrac{(X+1)X(X-1)\dots(X-k+2)}{k!} - \dfrac{X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)}{k!}$

$\Delta(H_k) = \dfrac{X(X-1)\dots(X-k+2)}{k!}((X+1)-(X-k+1)) = \dfrac{X(X-1)\dots(X-k+2)}{k!}k$

$\Delta(H_k) = \dfrac{X(X-1)\dots(X-(k-1)+1)}{(k-1)!} = H_{k-1}$

c) On a alors immédiatement $\Delta^2(H_k) = H_{k-2}$, $\Delta^3(H_k) = H_{k-3}$, jusqu'à $\Delta^k(H_k) = H_0$.

Comme $\Delta(H_0) = \Delta(1) = 0$, $\Delta^{k+1}(H_k) = 0$, et finalement
$$\Delta^i(H_k) = H_{k-i} \text{ pour } i \leqslant k \text{ et } \Delta^i(H_k) = 0 \text{ pour } i > k.$$

11. a)
- Pour $i < k$, $\Delta^i(H_k)(0) = H_{k-i}(0) = 0$ car 0 est une racine de H_j dès que $j > 0$.
- Pour $i = k$, $\Delta^i(H_k)(0) = H_0(0) = 1$.
- Pour $i > k$, $\Delta^i(H_k)(0) = 0$ puisque $\Delta^i(H_k) = 0$.
- Bilan : $\Delta^i(H_k)(0) = \delta_{i,k}$.

b) Par linéarité, pour tout i de $[\![0\,;\, n]\!]$:

$$\Delta^i(P)(0) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Delta^i(H_k)(0) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \delta_{i,k} = \alpha_i$$

Pour tout polynôme P de E et tout m entier naturel, on cherche à calculer

$$S_P(m) = P(0) + P(1) + \cdots + P(m) = \sum_{i=0}^{m} P(i)$$

On se donne donc un polynôme quelconque P de E.

12. $S_P(m) = 0$ si P est le polynôme nul ?

13. a) • Considérons $\Delta_{n+1} : E_{n+1} \longrightarrow E_{n+1}$. On sait que $\mathrm{Im}(\Delta_{n+1}) = E_n$ donc comme $P \in E_n$, P possède un antécédent R dans E_{n+1} vérifiant $\Delta_{n+1}(R) = P$, c'est-à-dire $R(X+1) - R(X) = P(X)$.

• Posons $Q(X) = R(X) - R(0)$. On a toujours $Q(X+1) - Q(X) = P(X)$, avec cette fois-ci $Q(0) = 0$.

• Supposons que Q_1 de E_{n+1} vérifient les conditions requises. Alors $\Delta_{n+1}(Q - Q_1) = 0$ donc $Q - Q_1 \in \mathrm{Ker}(\Delta_{n+1})$ donc $Q - Q_1 \in \mathbb{R}_0[X]$ donc $Q - Q_1 = cte$. Or $Q(0) - Q_1(0) = 0$ donc $Q = Q_1$.

Conclusion : il existe un unique polynôme Q de E_{n+1} tel que

$$Q(X+1) - Q(X) = P(X) \quad \text{et} \quad Q(0) = 0.$$

b) Prenons $Q_1 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i H_{i+1}$.

Comme $(H_i, 0 \leqslant i \leqslant n+1)$ est une base de E_{n+1}, $Q_1 \in E_{n+1}$.

De plus $\Delta(Q_1) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \Delta(H_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i H_i = P$, donc $Q_1(X+1) - Q_1(X) = P(X)$.

Enfin $Q_1(0) = \sum_{i=0}^{n} H_{i+1}(0) = 0$ car 0 est racine de tous les H_i tels que $i \leqslant 1$.

Par unicité, Q_1 est le polynôme Q cherché.

c) Par télescopage :

$$\sum_{i=0}^{m} P(i) = \sum_{i=0}^{m} (Q(i+1) - Q(i)) = Q(m+1) - Q(0) = Q(m+1)$$

14. a) $\Delta^0(P)(0) = P(0) = 0$,

$\Delta(P) = 3X^2 + 3X + 1$ (calculé en **6.**) et $\Delta(P)(0) = 1$,

$\Delta^2(P) = 3(2X+1) + 3 \times 1 = 6X + 6$ et $\Delta^2(P)(0) = 6$,

$\Delta^3(P) = 6$ et $\Delta^3(P)(0) = 6$.

b) Alors $P = H_1 + 6H_2 + 6H_3$, et $Q = H_2 + 6H_3 + 6H_4$. Ainsi :

$$Q = \frac{X(X-1)}{2} + X(X-1)(X-2) + \frac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{4}$$

$$Q = \frac{X(X-1)}{4}\left[2 + 4(X-2) + (X-2)(X-3)\right] = \frac{X(X-1)}{4}\left[X^2 - X\right]$$

$$Q = \frac{X^2(X-1)^2}{4}.$$

c) $\sum_{i=0}^{m} i^3 = \sum_{i=0}^{m} P(i) = Q(m+1) = \dfrac{m^2(m+1)^2}{4}$.

15. a) Si $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ avec $\alpha_k \in Z$ pour tout k, alors : $\forall m \in \mathbb{Z}, P(m) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k m^k \in \mathbb{Z}$: P est une solution du problème $\mathcal{P}$.

b) Soit $m \in \mathbb{Z}$.

Si m est un entier pair, écrivons-le $m = 2p$ avec p entier. Alors $P(m) = \dfrac{2p(2p+1)}{2} = p(2p+1) \in \mathbb{Z}$.

Si m est un entier impair, écrivons-le $m = 2p-1$ avec p entier. Alors $P(m) = \dfrac{(2p-1)(2p)}{2} = (2p-1)p \in \mathbb{Z}$.

Donc P est une solution du problème $\mathcal{P}$ et $P = \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X$ n'est pas à coefficients entiers.

16. a) ②$\Longleftrightarrow$③ puisque les $\Delta^i(P)(0)$ pour $\in [\![0\,;\, n]\!]$ sont exactement les coordonnées de P dans la base de Hilbert.

b) $\forall z \in \mathbb{Z}, \quad \Delta(P)(z) = P(z+1) - P(z) \in \mathbb{Z}$ car $P(z+1) \in \mathbb{Z}$, $P(z) \in \mathbb{Z}$ (P vérifiant ①).

Par récurrence immédiate sur la propriété $\mathcal{A}_i$:« $\Delta^i(P)$ vérifie ① », on a : $\forall \in [\![0\,;\, n]\!], \Delta^i(P)(0) \in \mathbb{Z}$, 0 étant un entier, si ! Donc P vérifie ②.

c) • $\forall m \in \mathbb{Z}, \quad H_0(m) = 1 \in \mathbb{Z}$.

• Pour $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, $H_k(m) = \dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!}$.

Donc si $m \in [\![0\,;\,k-1]\!]$, $\mathrm{H}_k(m)=0$ (m est une racine de H_k).

Et si $m \geqslant k$, $\mathrm{H}_k(m)=\dfrac{m!}{k!(m-k)!}=\dbinom{m}{k}\in\mathbb{N}$.

Et enfin si $m<0$, $\mathrm{H}_k(m)=(-1)^k\dfrac{-m(1-m)(2-m)\dots(k-1-m)}{k!}=(-1)^k\dfrac{(k-1-m)!}{k!(-m-1)!}=(-1)^k\dbinom{k-1-m}{k}\in\mathbb{Z}$

d) ③ siginifie que $\mathrm{P}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\mathrm{H}_k$ avec $\alpha_k\in\mathbb{Z}$ pour tout k de $[\![0\,;\,n]\!]$.

Alors par la question précédente, $\forall m\in\mathbb{Z},\quad \mathrm{P}(m)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\mathrm{H}_k(m)\in\mathbb{Z}$.

Donc P vérifie la condition ①.

Solution (Ex.2 –)

17. $x\longmapsto\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ est continue sur $]0\,;\,1]$ et prolongeable par continuité en 0 car $\dfrac{\ln(x+1)}{x}\underset{x\to0}{\sim}1$, donc J existe (elle est faussement impropre).

18. Les fonctions $u:x\longmapsto\ln(x+1)$ et $v:x\longmapsto\ln(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;\,1]$ avec $u(x)v(x)\xrightarrow[x\to0]{}0$ car $u(x)v(x)\underset{x\to0}{\sim}x\ln(x)\xrightarrow[x\to0]{}0$.

Par intégration par parties, $\mathrm{J}=[u(x)v(x)]_0^1-\displaystyle\int_0^1u'(x)v(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{\ln(x)}{x+1}\mathrm{d}x$.

19. a) Par absolue convergence ou par le théorème des séries alternées.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=\sum_{k\text{ pair}}\frac{1}{k^2}-\sum_{k\text{ impair}}\frac{1}{k^2}=\sum_{k\text{ pair}}\frac{1}{k^2}-\left(\sum_{k}\frac{1}{k^2}-\sum_{k\text{ pair}}\frac{1}{k^2}\right)=2\sum_{k\text{ pair}}\frac{1}{k^2}-\sum_{k}\frac{1}{k^2}$

or $\displaystyle\sum_{k\text{ pair}}\frac{1}{k^2}=\sum_{k}\frac{1}{(2k)^2}=\frac14\sum_{k}\frac{1}{k^2}$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=\left(\frac24-1\right)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

20. g_n est continue comme produit de fonctions continues sur $]0\,;\,1]$ et continue en 0 car $g_n(x)\xrightarrow[x\to0]{}0=g_n(0)$ par croissances comparées usuelles.
g_n étant continue sur le segment I, elle est bornée.

21. a) • $\forall n\in\mathbb{N}^*, g_n(0)=g_n(1)=0$ donc $g_n(0)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $g_n(1)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

• $\forall x\in\,]0\,;\,1[,\quad x^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $g_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Conclusion : $g_n\xrightarrow{\mathcal{CVS}}0$.

b) Toutes les fonctions g_n sont continues sur $]0\,;\,1]$ ainsi que leur limite simple 0, et
$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\,]0\,;\,1],\quad |g_n(x)|\leqslant|\ln(x)|$ puisque $|x^n|\leqslant1$, or d'après le cours $\ln\in\mathrm{L}^1(]0\,;\,1],\mathbb{R})$. Donc le théorème de convergence dominée s'applique et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1g_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 0\mathrm{d}x=0$.

22. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'étude de la fonction g_n montre que $\|g_n\|_\infty=\dfrac{1}{ne}$.

Donc par encadrement $\|g_n-0\|_\infty\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Ainsi $g_n\xrightarrow{\mathcal{CVU}}0$ sur le *segment* $[0\,;\,1]$. Comme les fonctions g_n sont toutes continues, le théorème d'interversion sur un segment s'applique : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1g_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 0\mathrm{d}x=0$.

23. Comme $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)\xrightarrow[x\to0]{}0$, l'intégration par parties avec les fonctions $x\longmapsto\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ et ln de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;\,1]$ fournit :

$\displaystyle\int_0^1g_n(x)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{(n+1)^2}$, et effectivement $\displaystyle\int_0^1g_n(x)\mathrm{d}x\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Partie B – Calcul de l'intégrale J par une première méthode

24. • Si $x=0$ ou $x=1$, $f_n(x)=0$ pour tout n donc $f_n(0)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $f_n(1)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

• Soit $x\in$
*intoo*01. La suite $(|g_k(x)|)_{k\geqslant1}=\left(x^k|\ln(x)|\right)_{k\geqslant1}$ est décroissante de limite nulle. Par le théorème de Leibniz, la série de terme général $(-1)^{k+1}g_{k(x)}$ converge.

25. a) $f_n(x)-\ell(x)$ étant le reste d'ordre n de la série précédente, le théorème de Leibniz assure, toujours pour x fixé dans $]0\,;\,1[$, $|f_n(x)-\ell(x)|\leqslant|g_{n+1}(x)|$.

Et pour $x\in\{0,1\}$, $f_n(x)-\ell(x)=0=g_{n+1}(x)$.

b) Par la question précédente, $\forall x\in \mathrm{I},\quad |f_n(x)-\ell(x)|\leqslant|g_{n+1}(x)|$.

Or (cf. 22) de $\|g_{n+1}\|_\infty=\dfrac{1}{(n+1)\mathrm{e}}$. Donc $f_n-\ell$ est une fonction bornée et vérifie $\|f_n-\ell\|_\infty\leqslant\dfrac{1}{(n+1)\mathrm{e}}$. Par encadrement, $\|f_n-\ell\|_\infty\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

On en déduit la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) ver la fonction ℓ.

c) Comme les fonctions f_n sont **continues sur le segment [0,1]** et la suite (f_n) converge uniformément vers ℓ, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ existe et vaut $\displaystyle\int_0^1\ell(x)\mathrm{d}x$.

26. a) Comme somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x\neq1$, pour tout x de $]0\,;\,1]$, $f_n(x)=x\ln(x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k=x\ln(x)\frac{1-(-x)^n}{1+x}$.

b) • Les fonctions f_n sont *c.p.m.* sur $]0\,;\,1]$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$;

• $f_n\xrightarrow{\mathcal{CVS}}\ell:]0\,;\,1]\longrightarrow\mathbb{R}, x\longmapsto\dfrac{x\ln(x)}{1+x}$;

• ℓ est *c.p.m.* sur $]0\,;\,1]$;

• Par la question précédente,

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in]0\,;\,1],\quad |f_n(x)|\leqslant x|\ln(x)|\dfrac{1+|(-x)^n|}{1}\leqslant-2\ln(x)$

or $-2\ln\in\mathrm{L}^1(]0\,;\,1],\mathbb{R})$ d'après le cours et par linéarité.

Le théorème de convergence dominée s'applique : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ existe et vaut $\displaystyle\int_0^1\ell(x)\mathrm{d}x$.

27. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, par linéarité, l'intégrale de g_k ayant été calculé à la fin de la partie A : $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\int_0^1 g_k(k)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{-1}{(k+1)^2}=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}=\int_0^1\ell(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x\ln(x)}{x+1}\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_0^1\ln(x)\mathrm{d}x=-1$, et par linéarité,

$\displaystyle\mathrm{J}=-\int_0^1\frac{\ln(x)}{x+1}\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{(x+1-x)\ln(x)}{x+1}\mathrm{d}x=-\int_0^1\ln(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x\ln(x)}{x+1}\mathrm{d}x=1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et par la question préliminaire

$$\mathrm{J}=\frac{\pi^2}{12}.$$

Partie C – Calcul de l'intégrale J par une seconde méthode

28. a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kt^k=\frac{1-(-t)^n}{1+t}$ car il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $-t\neq1$.

b) En intégrant la relation précédente sur le segment $[0\,;\,x]$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^kx^{k+1}}{k+1}=\ln(x+1)+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t$.

29. Par la question précédente, pour $x\in]0\,;\,1]$,

$h_n(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}+\dfrac{(-1)^{n+1}}{x}\displaystyle\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t$

Or $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{x}\displaystyle\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right|\leqslant\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t^n\mathrm{d}t\leqslant\dfrac{1}{x}\times\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\leqslant\dfrac{x^n}{n+1}\leqslant\dfrac{1}{n}$

Alors par le théorème des gendarmes, $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{x}\displaystyle\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Ainsi $h_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=h(x)$.

30. a) h est continue sur $]0\,;\,1]$ et prolongeable par continiuité en 0 car $h(x)\xrightarrow[x\to0]{}$

1. En notant $\widetilde{h}$ le prolongement par continuité de h sur le segment I, $\widetilde{h}$ est continue sur le segment I, donc bornée, et il existe une constante M telle que : $\quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad \left|\widetilde{h}(x)\right| \leqslant \mathrm{M}$.

Alors : $\forall x \in]0\,;\,1], \quad |h(x)| = \left|\widetilde{h}(x)\right| \leqslant \mathrm{M}$. Donc h est bornée sur $]0\,;\,1]$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $]0\,;\,1]$,

$$|h_n(x)| = \left|\frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{(-1)^{n+1}}{x}\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant |h(x)| + \left|\frac{(-1)^{n+1}}{x}\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right|$$

$$|h(x)| \leqslant \mathrm{M} + \left|\frac{1}{x}\int_0^x 1\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{M} + \frac{1}{x}\times x \leqslant \mathrm{M}+1.$$

En définissant φ par $\varphi :]0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \mathrm{M}+1$, φ est intégrable sur $]0\,;\,1]$ et majore $|h_n|$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

c) La suite (h_n) vérifie toutes les conditions du théorème de convergence dominée, avec pour limite simple h.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = \mathrm{J}$.

Or par linéarité $\displaystyle\int_0^1 h_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\int_0^1 x^{k-1}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

D'où par la question préliminaire :

$$\mathrm{J} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$