Les deux exercices sont indépendants – Durée : 4 heures
Les calculatrices et téléphones sont interdits.

Exercice 1 *Polynômes de Hilbert*

Soit n un nombre entier au moins égal à 2. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels et E_n le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On note par ailleurs Δ et $\mathcal{T}$ les applications définies sur E par

$$\forall P \in E, \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X) \quad \text{et} \quad \mathcal{T}(P) = P(X+1).$$

1. Justifier que Δ et $\mathcal{T}$ sont des endomorphismes de E.

Partie A – Quelques propriétés de Δ et $\mathcal{T}$

2. a) Rappeler, pour k entier naturel, le développement de $(X+1)^k$ par la formule du binôme de Newton et en déduire que pour tout polynôme non constant P de E,
$$\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1.$$
   b) Que dire de $\deg(\Delta(P))$ si P est un polynôme constant ?
   c) Justifier que E_n est stable par Δ.
3. On note Δ_n l'endomorphisme induit par Δ sur E_n :
$$\Delta_n : \begin{array}{rcl} E_n & \longrightarrow & E_n \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$
   a) Justifier que Δ_n est nilpotent d'indice $n+1$, c'est-à-dire que
$$\left(\Delta_n\right)^n \neq 0 \quad \text{et} \quad \left(\Delta_n\right)^{n+1} = 0.$$
   b) Déterminer le noyau, l'image et le rang de Δ_n.
4. a) Quel lien existe entre le degré d'un polynôme et celui de son image par $\mathcal{T}$?
   b) Expliciter $\mathcal{T}^k(P)$ pour tout entier naturel k et tout polynôme P.
   c) Justifier que $\mathcal{T}$ est un automorphisme de E et expliciter $\mathcal{T}^{-1}(P)$ pour tout polynôme P.
   d) Justifier que E_n est stable par $\mathcal{T}$.
5. On note $\mathcal{T}_n$ l'endomorphisme induit par $\mathcal{T}$ sur E_n :
$$\mathcal{T}_n : \begin{array}{rcl} E_n & \longrightarrow & E_n \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$$
   Que dire du noyau, de l'image et du rang de $\mathcal{T}_n$?

Partie B – Lorsque n vaut trois

On suppose $n = 3$, **uniquement pour cette partie**.
$\mathcal{C}$ désigne la base canonique de E_3, définie par $\mathcal{C} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$.
Soit F le sous-espace de E engendré par la famille $\mathcal{B} = (X, X^2, X^3, X^4)$, et δ l'application linéaire définie par

$$\delta : \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & E_3 \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

Autrement dit, δ est la restriction de Δ à F.

6. Écrire la matrice $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\delta)$, matrice représentant δ en prenant respectivement $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ comme bases de F et de E_3.
7. Justifier que δ est un isomorphisme.
8. On note π l'isomorphisme réciproque de δ.

Autrement dit, $\pi = \delta^{-1}$ et pour tout polynôme P de E_3, $\pi(P)$ est l'unique polynôme Q de F vérifiant $P(X) = Q(X+1) - Q(X)$.

On pose $H_0 = 1$, et pour i dans $[\![1\,;\, 3]\!]$, $H_i = \pi^i(H_0)$.

a) Si P est un polynôme de degré $d \in [\![0\,;\, 3]\!]$ de E_3, quel est le degré de $\pi(P)$?

b) En déduire que $\mathcal{H} = (H_0, H_1, H_2, H_3)$ est une base de E_3.

c) Sans chercher à calculer les éléments de $\mathcal{H}$, déterminer la matrice représentant Δ_3 dans la base $\mathcal{H}$.

9. a) Déterminer la matrice Π représentant π relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$.

b) Calculer explicitement H_1, H_2 et H_3.

c) Donner une expression factorisée des polynômes H_2 et H_3.

Partie C – Intervention des polynômes de Hilbert

Pour k entier naturel, on définit le k–ème polynôme de Hilbert H_k par

$$H_0 = 1 \quad \text{et, si } k \geqslant 1, \quad H_k = \frac{X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i).$$

10. a) Justifier que la famille $(H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E_n.

b) Montrer que, pour k entier naturel non nul, $\Delta(H_k) = H_{k-1}$.

c) En déduire $\Delta^i(H_k)$.

11. a) Justifier que $\Delta^i(H_k)(0) = \delta_{i,k}$ où $\delta_{i,k}$ désigne le symbole de Kronecker, égal à 1 si $i = k$ et valant 0 sinon.

b) Soit P un polynôme de E_n. On suppose que P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k H_k$ dans la base $(H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de E_n.

Montrer que pour tout k de $[\![0\,;\, n]\!]$, $\alpha_k = \Delta^k(P)(0)$.

Ainsi on a établi : $\boxed{(\heartsuit) \qquad \forall P \in E_n, \quad P = \sum_{i=0}^{n} \Delta^i(P)(0) H_i.}$

Partie D – Application aux calculs de sommes

Pour tout polynôme P de E et tout m entier naturel, on cherche à calculer

$$S_P(m) = P(0) + P(1) + \cdots + P(m) = \sum_{i=0}^{m} P(i)$$

On se donne donc un polynôme quelconque P de E.

12. Que vaut $S_P(m)$ si P est le polynôme nul ?

Dans la suite de cette partie, on suppose P non nul et on note n son degré.

13. a) Justifier qu'il existe un unique polynôme Q de E_{n+1} tel que

$$Q(X+1) - Q(X) = P(X) \quad \text{et} \quad Q(0) = 0.$$

b) On écrit $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i H_i$ où les $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont les coordonnées de P dans la base de Hilbert $(H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de E_n.

Justifier que $Q = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i H_{i+1}$.

c) Montrer enfin que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad S_P(m) = Q(m+1).$$

14. *Application au calcul de* $\sum_{i=0}^{m} i^3$

On pose $P = X^3$.

a) Calculer pour i dans $[\![1\,;\, 3]\!]$ la valeur du polynôme $\Delta^i(P)$ en 0.

b) En déduire l'unique polynôme Q de degré 4 nul en 0 et vérifiant

$$Q(X+1) - Q(X) = X^3.$$

c) Donner alors une expression explicite en fonction de m de $\sum_{i=0}^{m} i^3$.

Partie E – Polynômes vérifiant $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$

On s'intéresse au problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$(\mathcal{P})$: « Quels sont les polynômes P de E_n vérifiant $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$? »

où $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ signifie : $\forall m \in \mathbb{Z}, \quad P(m) \in \mathbb{Z}$.

15. a) Justifier que si P est un polynôme de E_n à coefficients entiers, alors P est une solution de $(\mathcal{P})$.

b) Justifier que $P = \frac{1}{2}X(X+1)$ est une solution de $(\mathcal{P})$.
P est-il à coefficients entiers ?

16. On souhaite établir que, pour tout polynôme P de E_n, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

① $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$;

② $\forall i \in [\![0\,;\,n]\!], \quad \Delta^i(P)(0) \in \mathbb{Z}$;

③ les coordonnées de P dans la base de Hilbert $(H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ sont toutes entières.

a) Justifier que les conditions ② et ③ sont équivalentes.

b) On suppose que P vérifie la condition ①.
Justifier que $\Delta(P)$ vérifie aussi la condition ① puis que P vérifie la condition ②.

c) Soit k dans $[\![0\,;\,n]\!]$ et m un entier relatif. Montrer que $H_k(m)$ est un entier relatif. *On pourra distinguer les cas* $m \geqslant k$, $0 \leqslant m \leqslant k-1$ *et* $m \leqslant -1$.

d) En déduire que, si P vérifie la condition ③, alors P vérifie la condition ①.

Solution (**Ex.1 –** *Polynômes de Hilbert*)

1. Aucun souci.

2. a) $(X+1)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i = X^k + kX^{k-1} + \ldots$

On a alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta(X^k) = kX^{k-1} + \ldots$ et $\deg(\Delta(X^k)) = k-1$.

Et par linéarité, on écrivant $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$:

$\Delta(P) = a_d d X^{d-1} + Q$ avec $\deg(Q) \leqslant d-2$, donc $\deg(\Delta(P)) = d-1 = \deg(P)-1$.

Et si P est constant, $P(X+1) = P(X)$ et $\deg(\Delta(P)) = \deg(0) = -\infty$.

b) Soit $P \in E_n$. Comme $\Delta \in \mathcal{L}(E)$, $\Delta(P) \in E$. Et comme $\deg(P) \leqslant n$, $\deg(\Delta(P)) \leqslant n-1$, donc $P \in E_n$ et E_n est stable par Δ.

3. a) Puisque chaque application de Δ diminue le dégré d'une unité, $\deg((\Delta_n)^n(X^n)) = n - n = 0 \neq -\infty$ donc $(\Delta_n)^n(X^n) \neq 0$ donc $(\Delta_n)^n \neq 0$.

Pour la même raison, si $P \in E_n$, $\deg((\Delta_n)^{n+1}(P)) \leqslant n-(n+1) \leqslant -1$ donc $(\Delta_n)^{n+1}(P) = 0$, et $(\Delta_n)^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E_n)}$

b) • Si $\deg(P) \geqslant 1$, $\deg(\Delta_n(P)) \geqslant 0$ donc $\Delta_n(P) \neq 0$. Mais si P est constant, $\Delta_n(P) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{R}_0[X]$.

• par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(\Delta_n) = \dim(E_n) - \dim(\mathrm{Ker}(\Delta_n)) = n+1-1 = n$.

• Toujours en raison des degrés, si $P \in E_n$, alors $\Delta_n(P) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc $\mathrm{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et par égalité des dimensions, $\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

4. a) Pour tout polynôme P, $\deg(\mathcal{T}(P)) = \deg(P)$.

b) $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{T}^k(P) = P(X+k)$.

c) Et si la formule précédente avait encore un sens pour $k = -1$?

Posons $\mathcal{U} : P \longmapsto P(X-1)$. Alors clairement

$\mathcal{T} \circ \mathcal{U}(P) = \mathcal{T}(P(X-1)) = P(X)$ et $\mathcal{U} \circ \mathcal{T}(P) = \mathcal{U}(P(X+1)) = P(X)$.

Donc $\mathcal{T}$ est bijectif et $\mathcal{U} = \mathcal{T}^{-1}$: $\mathcal{T}$ est un automorphisme de E et $\mathcal{T}^{-1}(P) = P(X-1)$ pour tout polynôme P.

d) Par conservation du degré lorsqu'on applique $\mathcal{T}$, E_n est stable par $\mathcal{T}$.

5. Toujours par conservation du degré, $\mathrm{Ker}(\mathcal{T}_n) = \{0\}$, donc $\mathcal{T}$ est injectif. Et comme E_n est de dimension finie, l'endomorphisme $\mathcal{T}_n$ est un automorphisme. Donc $\mathrm{Im}(\mathcal{T}) = E_n$ et $\mathrm{rg}(\mathcal{T}_n) = n+1$.

6. $\delta(X) = 1$, $\delta(X^2) = 2X+1$, $\delta(X^3) = 3X^2+3X+1$, $\delta(X^4) = 4X^3+6X^2+4X+1$,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

7. $\dim(\mathrm{Im}(\delta)) = \mathrm{rg}(\delta) = \mathrm{rg}(D) = 4 = \dim(E_3)$ donc δ est surjectif. Comme $\dim(F) = \dim(E_3)$, δ est un isomorphisme.

8. a) Puisque $P = \delta(\pi(P))$, $\deg(P) = \deg(\pi(P)) - 1$ donc $\deg(\pi(P)) = \deg(P) + 1$.

b) $\deg(H_0) = 0$, $\deg(H_1) = \deg(\pi(H_0)) = 0 + 1 = 1$, $\deg(H_2) = \deg(\pi(H_1)) = 1 + 1 = 2$ et $\deg(H_3) = \deg(\pi(H_2)) = 2 + 1 = 3$, donc $\mathcal{H}$ est une famille de quatre polynômes échelonnée en degré de $E_3 = \mathbb{R}_3[X]$, donc est une base de E_3.

c) $\Delta(H_0) = 0$, et pour tout i de $[\![1\,;\,3]\!]$, $\Delta(H_i) = \delta(\pi(H_{i-1})) = H_{i-1}$.

Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}(\Delta_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, magnifique matrice nilpotente d'ordre 4 comme prévu par la question 3.

9. a) Comme $\pi = \delta^{-1}$, la matrice représentant π est l'inverse de la matrice représentant δ dans les bases idoines.

$$\Pi = D^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $H_1 = \pi(H_0)$ donc en notant $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ la colonne représentant H_0 dans $\mathcal{C}$ et W_1 celle représentant H_1 dans $\mathcal{B}$, on a :

$W_1 = \Pi V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $H_1 = X$, et $V_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(H_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Avec les mêmes notations

$W_2 = \Pi V_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $H_2 = -X/2 + X^2/2$, et $V_2 = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(H_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$W_3 = \Pi V_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $H_3 = X/3 - X^2/2 + X^3/6$.

Variante : On peut chercher $H_1 = aX$ car de degré 1 dans F tel que $H_1(X+1) - H_1(X) = 1$, i.e. $aX + a - aX = 1$, donc $a = 1$ et $H_1 = X$. Et on recommence avec $H_2 = aX + bX^2$ vérifiant $H_2(X+1) - H_2(X) = X$, etc.

c) $H_2 = \dfrac{X(X-1)}{2}$ et $H_3 = \dfrac{X^3 - 3X^2 + 2X}{6} = \dfrac{X(X^2 - 3X + 2)}{6} = \dfrac{X(X-1)(X-2)}{6}$.

10. a) La famille $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille échelonnée en degré, de 0 à n, de E_n donc est une base de E_n.

b) $\Delta(H_k) = \dfrac{(X+1)X(X-1)\ldots(X-k+2)}{k!} - \dfrac{X(X-1)(X-2)\ldots(X-k+1)}{k!}$

$\Delta(H_k) = \dfrac{X(X-1)\ldots(X-k+2)}{k!}((X+1)-(X-k+1)) = \dfrac{X(X-1)\ldots(X-k+2)}{k!}k$

$\Delta(H_k) = \dfrac{X(X-1)\ldots(X-(k-1)+1)}{(k-1)!} = H_{k-1}$

c) On a alors immédiatement $\Delta^2(H_k) = H_{k-2}$, $\Delta^3(H_k) = H_{k-3}$, jusqu'à $\Delta^k(H_k) = H_0$.

Comme $\Delta(H_0) = \Delta(1) = 0$, $\Delta^{k+1}(H_k) = 0$, et finalement

$$\Delta^i(H_k) = H_{k-i} \text{ pour } i \leqslant k \text{ et } \Delta^i(H_k) = 0 \text{ pour } i > k.$$

11. a) • Pour $i < k$, $\Delta^i(H_k)(0) = H_{k-i}(0) = 0$ car 0 est une racine de H_j dès que $j > 0$.

• Pour $i = k$, $\Delta^i(H_k)(0) = H_0(0) = 1$.

• Pour $i > k$, $\Delta^i(H_k)(0) = 0$ puisque $\Delta^i(H_k) = 0$.

• Bilan : $\Delta^i(H_k)(0) = \delta_{i,k}$.

b) Par linéarité, pour tout i de $[\![0 ; n]\!]$:

$$\Delta^i(P)(0) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Delta^i(H_k)(0) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \delta_{i,k} = \alpha_i$$

12. $S_P(m) = 0$ si P est le polynôme nul ?

13. a) • Considérons $\Delta_{n+1} : E_{n+1} \longrightarrow E_{n+1}$. On sait que $\operatorname{Im}(\Delta_{n+1}) = E_n$ donc comme $P \in E_n$, P possède un antécédent R dans E_{n+1} vérifiant $\Delta_{n+1}(R) = P$, c'est-à-dire $R(X+1) - R(X) = P(X)$.

• Posons $Q(X) = R(X) - R(0)$. On a toujours $Q(X+1) - Q(X) = P(X)$, avec cette fois-ci $Q(0) = 0$.

• Supposons que Q_1 de E_{n+1} vérifient les conditions requises. Alors $\Delta_{n+1}(Q - Q_1) = 0$ donc $Q - Q_1 \in \operatorname{Ker}(\Delta_{n+1})$ donc $Q - Q_1 \in \mathbb{R}_0[X]$ donc $Q - Q_1 = cte$. Or $Q(0) - Q_1(0) = 0$ donc $Q = Q_1$.

Conclusion : il existe un unique polynôme Q de E_{n+1} tel que

$$Q(X+1) - Q(X) = P(X) \quad \text{et} \quad Q(0) = 0.$$

b) Prenons $Q_1 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i H_{i+1}$.

Comme $(H_i, 0 \leqslant i \leqslant n+1)$ est une base de E_{n+1}, $Q_1 \in E_{n+1}$.

De plus $\Delta(Q_1) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \Delta(H_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i H_i = P$, donc $Q_1(X+1) - Q_1(X) = P(X)$.

Enfin $Q_1(0) = \sum_{i=0}^{n} H_{i+1}(0) = 0$ car 0 est racine de tous les H_i tels que $i \leqslant 1$.

Par unicité, Q_1 est le polynôme Q cherché.

c) Par télescopage :

$$\sum_{i=0}^{m} P(i) = \sum_{i=0}^{m} (Q(i+1) - Q(i)) = Q(m+1) - Q(0) = Q(m+1)$$

14. a) $\Delta^0(P)(0) = P(0) = 0$,

$\Delta(P) = 3X^2 + 3X + 1$ (calculé en **6.**) et $\Delta(P)(0) = 1$,

$\Delta^2(P) = 3(2X+1) + 3 \times 1 = 6X + 6$ et $\Delta^2(P)(0) = 6$,

$\Delta^3(P) = 6$ et $\Delta^3(P)(0) = 6$.

b) Alors $P = H_1 + 6H_2 + 6H_3$, et $Q = H_2 + 6H_3 + 6H_4$. Ainsi :

$Q = \dfrac{X(X-1)}{2} + X(X-1)(X-2) + \dfrac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{4}$

$Q = \dfrac{X(X-1)}{4}[2 + 4(X-2) + (X-2)(X-3)] = \dfrac{X(X-1)}{4}\left[X^2 - X\right]$

$Q = \dfrac{X^2(X-1)^2}{4}$.

c) $\sum_{i=0}^{m} i^3 = \sum_{i=0}^{m} P(i) = Q(m+1) = \dfrac{m^2(m+1)^2}{4}$.

15. a) Si $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ avec $\alpha_k \in Z$ pour tout k, alors : $\forall m \in \mathbb{Z}, P(m) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k m^k \in \mathbb{Z}$: P est une solution du problème $\mathcal{P}$.

b) Soit $m \in \mathbb{Z}$.

Si m est un entier pair, écrivons-le $m = 2p$ avec p entier. Alors $\mathrm{P}(m) = \dfrac{2p(2p+1)}{2} = p(2p+1) \in \mathbb{Z}$.

Si m est un entier impair, écrivons-le $m = 2p-1$ avec p entier. Alors $\mathrm{P}(m) = \dfrac{(2p-1)(2p)}{2} = (2p-1)p \in \mathbb{Z}$.

Donc P est une solution du problème $\mathcal{P}$ et $\mathrm{P} = \dfrac{1}{2}\mathrm{X}^2 + \dfrac{1}{2}\mathrm{X}$ n'est pas à coefficients entiers.

16. a) ②$\Longleftrightarrow$③ puisque les $\Delta^i(\mathrm{P})(0)$ pour $\in [\![0\,;\,n]\!]$ sont exactement les coordonnées de P dans la base de Hilbert.

b) $\forall z \in \mathbb{Z}, \quad \Delta(\mathrm{P})(z) = \mathrm{P}(z+1) - \mathrm{P}(z) \in \mathbb{Z}$ car $\mathrm{P}(z+1) \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{P}(z) \in \mathbb{Z}$ (P vérifiant ①).

Par récurrence immédiate sur la propriété $\mathcal{A}_i$:« $\Delta^i(\mathrm{P})$ vérifie ① », on a : $\forall \in [\![0\,;\,n]\!], \Delta^i(\mathrm{P})(0) \in \mathbb{Z}$, 0 étant un entier, si ! Donc P vérifie ②.

c) • $\forall m \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{H}_0(m) = 1 \in \mathbb{Z}$.

• Pour $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\mathrm{H}_k(m) = \dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!}$.

Donc si $m \in [\![0\,;\,k-1]\!]$, $\mathrm{H}_k(m) = 0$ (m est une racine de H_k).

Et si $m \geqslant k$, $\mathrm{H}_k(m) = \dfrac{m!}{k!(m-k)!} = \dbinom{m}{k} \in \mathbb{N}$.

Et enfin si $m < 0$, $\mathrm{H}_k(m) = (-1)^k \dfrac{-m(1-m)(2-m)\ldots(k-1-m)}{k!} = (-1)^k \dfrac{(k-1-m)!}{k!(-m-1)!} = (-1)^k \dbinom{k-1-m}{k} \in \mathbb{Z}$

d) ③ siginifie que $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{H}_k$ avec $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ pour tout k de $[\![0\,;\,n]\!]$.

Alors par la question précédente, $\forall m \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{P}(m) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{H}_k(m) \in \mathbb{Z}$.

Donc P vérifie la condition ①.

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur de l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x}\mathrm{d}x.$$

Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle $[\,0\,;\,1\,]$.

Questions préliminaires

17. Justifier que J existe.

18. Justifier que

$$\mathrm{J} = -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x+1}\mathrm{d}x.$$

19. a) Justifier que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k^2}$ (pour k dans $\mathbb{N}^*$) converge.

b) On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Partie A – Étude d'une suite de fonctions

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction

$$g_n : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

20. Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, g_n est continue et bornée sur I.

21. a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (g_n).

b) Énoncer précisément le théorème de convergence dominée et justifier, à l'aide de ce théorème et sans calculer explicitement $\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x$, que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

22. Montrer que la convergence de la suite de fonctions (g_n) est uniforme et retrouver la limite précédente en énonçant précisément le théorème employé.

23. Retrouver la limite précédente en calculant explicitement les intégrales $\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x$.

Partie B – Calcul de l'intégrale J par une première méthode

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de I,

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}g_k(x).$$

Autrement dit, pour tout x de I, la suite numérique $(f_n(x))$ est la série de terme général $(-1)^{k+1}g_k(x)$.

24. Justifier que, pour tout x fixé dans I, la suite numérique $(f_n(x))$ converge. On notera $\ell(x)$ sa limite.

25. **a)** Toujours pour x fixé dans I, justifier que $|f_n(x)-\ell(x)| \leqslant |g_{n+1}(x)|$.

b) En déduire la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n).

c) Que peut-on en déduire quant à $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$?

26. **a)** Justifier que, pour tout x de $]0\,;\,1]$, $f_n(x) = x\ln(x)\dfrac{1-(-x)^n}{1+x}$.

b) Retrouver la conclusion de la question précédente grâce au théorème de convergence dominée.

27. **a)** Déduire des questions précédentes que

$$\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{x+1}\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

b) Rappeler la valeur de $\int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x$ et en déduire la valeur de J.

Partie C – Calcul de l'intégrale J par une seconde méthode

28. **a)** Justifier que pour tout réel t de I et tout entier n de $\mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k = \frac{1-(-t)^n}{1+t}.$$

b) En déduire, pour tout réel x de I et tout entier n de $\mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(x+1)+(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t.$$

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$h_n :]0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^{k-1}}{k}.$$

29. Montrer que la suite de fonctions (h_n) converge simplement vers la fonction h définie sur $]0\,;\,1]$ par

$$h(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

30. **a)** Montrer que h est bornée sur $]0\,;\,1]$. *Il n'est pas nécessaire d'étudier les variations de h pour cela...*

b) En déduire une fonction φ intégrable sur $]0\,;\,1]$ telle que pour tout n de

$\mathbb{N}^*$ et tout x de $]0;1]$,

$$|h_n(x)| \leqslant \varphi(x).$$

c) En déduire que

$$\mathrm{J} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Solution (Ex.2 –)

17. $x \longmapsto \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ est continue sur $]0;1]$ et prolongeable par continuité en 0 car $\dfrac{\ln(x+1)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$, donc J existe (elle est faussement impropre).

18. Les fonctions $u : x \longmapsto \ln(x+1)$ et $v : x \longmapsto \ln(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1]$ avec $u(x)v(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ car $u(x)v(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Par intégration par parties, $\mathrm{J} = [u(x)v(x)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x+1}\mathrm{d}x$.

19. a) Par absolue convergence ou par le théorème des séries alternées.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k \text{ pair}} \frac{1}{k^2} - \sum_{k \text{ impair}} \frac{1}{k^2} = \sum_{k \text{ pair}} \frac{1}{k^2} - \left(\sum_{k} \frac{1}{k^2} - \sum_{k \text{ pair}} \frac{1}{k^2}\right) = 2\sum_{k \text{ pair}} \frac{1}{k^2} - \sum_{k} \frac{1}{k^2}$

or $\displaystyle\sum_{k \text{ pair}} \frac{1}{k^2} = \sum_{k} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k} \frac{1}{k^2}$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \left(\frac{2}{4} - 1\right)\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

20. g_n est continue comme produit de fonctions continues sur $]0;1]$ et continue en 0 car $g_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = g_n(0)$ par croissances comparées usuelles.

g_n étant continue sur le segment I, elle est bornée.

21. a) • $\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n(0) = g_n(1) = 0$ donc $g_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $g_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• $\forall x \in]0;1[, \quad x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Conclusion : $g_n \overset{\mathcal{CVS}}{\longrightarrow} 0$.

b) Toutes les fonctions g_n sont continues sur $]0;1]$ ainsi que leur limite simple 0, et

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0;1], \quad |g_n(x)| \leqslant |\ln(x)|$ puisque $|x^n| \leqslant 1$, or d'après le cours $\ln \in \mathrm{L}^1(]0;1], \mathbb{R})$. Donc le théorème de convergence dominée s'applique et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x = 0$.

22. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'étude de la fonction g_n montre que $\|g_n\|_\infty = \dfrac{1}{ne}$.

Donc par encadrement $\|g_n - 0\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi $g_n \overset{\mathcal{CVU}}{\longrightarrow} 0$ sur le *segment* $[0;1]$. Comme les fonctions g_n sont toutes continues, le théorème d'interversion sur un segment s'applique : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x = 0$.

23. Comme $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, l'intégration par parties avec les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ et ln de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1]$ fournit :
$\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}$, et effectivement $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Partie B – Calcul de l'intégrale J par une première méthode

24. • Si $x = 0$ ou $x = 1$, $f_n(x) = 0$ pour tout n donc $f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $f_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• Soit $x \in]0;1[$. La suite $(|g_k(x)|)_{k\geqslant 1} = \left(x^k|\ln(x)|\right)_{k\geqslant 1}$ est décroissante de limite nulle. Par le théorème de Leibniz, la série de terme général $(-1)^{k+1}g_{k(x)}$ converge.

25. a) $f_n(x) - \ell(x)$ étant le reste d'ordre n de la série précédente, le théorème de Leibniz assure, toujours pour x fixé dans $]0;1[$, $|f_n(x) - \ell(x)| \leqslant |g_{n+1}(x)|$.

Et pour $x \in \{0,1\}$, $f_n(x) - \ell(x) = 0 = g_{n+1}(x)$.

b) Par la question précédente, $\forall x \in \mathrm{I}, \quad |f_n(x) - \ell(x)| \leqslant |g_{n+1}(x)|$.

Or (cf. 22) de $\|g_{n+1}\|_\infty = \dfrac{1}{(n+1)\mathrm{e}}$. Donc $f_n - \ell$ est une fonction bornée et vérifie $\|f_n-\ell\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{(n+1)\mathrm{e}}$. Par encadrement, $\|f_n-\ell\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On en déduit la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) ver la fonction ℓ.

c) Comme les fonctions f_n sont **continues sur le segment [0,1]** et la suite (f_n) converge uniformément vers ℓ, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ existe et vaut $\displaystyle\int_0^1 \ell(x)\mathrm{d}x$.

26. a) Comme somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$, pour tout x de $]0;1]$, $f_n(x) = x\ln(x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k = x\ln(x)\frac{1-(-x)^n}{1+x}$.

b) • Les fonctions f_n sont *c.p.m.* sur $]0;1]$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$;
• $f_n \xrightarrow{CVS} \ell :]0;1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \dfrac{x\ln(x)}{1+x}$;
• ℓ est *c.p.m.* sur $]0;1]$;
• Par la question précédente,
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0;1], \quad |f_n(x)| \leqslant x|\ln(x)|\dfrac{1+|(-x)^n|}{1} \leqslant -2\ln(x)$
or $-2\ln \in \mathrm{L}^1(]0;1],\mathbb{R})$ d'après le cours et par linéarité.
Le théorème de convergence dominée s'applique : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ existe et vaut $\displaystyle\int_0^1 \ell(x)\mathrm{d}x$.

27. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, par linéarité, l'intégrale de g_k ayant été calculé à la fin de la partie A : $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\int_0^1 g_k(k)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{-1}{(k+1)^2} = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \int_0^1 \ell(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x\ln(x)}{x+1}\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x = -1$, et par linéarité,

$\mathrm{J} = \displaystyle -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x+1}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{(x+1-x)\ln(x)}{x+1}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x\ln(x)}{x+1}\mathrm{d}x = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et par la question préliminaire

$$\mathrm{J} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Partie C – Calcul de l'intégrale J par une seconde méthode

28. a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$ car il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $-t \neq 1$.

b) En intégrant la relation précédente sur le segment $[0;x]$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(x+1) + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t$.

29. Par la question précédente, pour $x \in]0;1]$,
$h_n(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t$
Or $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t^n\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\times\frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{x^n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$
Alors par le théorème des gendarmes, $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Ainsi $h_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = h(x)$.

30. a) h est continue sur $]0;1]$ et prolongeable par continiuité en 0 car $h(x) \xrightarrow[x\to0]{} 1$. En notant $\widetilde{h}$ le prolongement par continuité de h sur le segment I, $\widetilde{h}$ est continue sur le segment I, donc bornée, et il existe une constante M telle que : $\forall x \in \mathrm{I}, \quad \left|\widetilde{h}(x)\right| \leqslant \mathrm{M}$.

Alors : $\forall x \in]0\,;\,1], \quad |h(x)| = \left|\widetilde{h}(x)\right| \leqslant \mathrm{M}$. Donc h est bornée sur $]0\,;\,1]$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $]0\,;\,1]$,

$|h_n(x)| = \left|\dfrac{\ln(x+1)}{x} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{x}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant |h(x)| + \left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{x}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right|$

$|h(x)| \leqslant \mathrm{M} + \left|\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x 1\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{M} + \dfrac{1}{x} \times x \leqslant \mathrm{M}+1$.

En définissant φ par $\varphi :]0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \mathrm{M}+1$, φ est intégrable sur $]0\,;\,1]$ et majore $|h_n|$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

c) La suite (h_n) vérifie toutes les conditions du théorème de convergence dominée, avec pour limite simple h.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = \mathrm{J}$.

Or par linéarité $\displaystyle\int_0^1 h_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\int_0^1 x^{k-1}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

D'où par la question préliminaire :

$$\mathrm{J} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$