Je rappelle qu'un scalaire λ est une valeur propre d'un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ s'il existe un vecteur u non nul tel que $\varphi(u) = \lambda u$, ce qui est immédaitement équivalent au fait que $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda id_{\mathrm{E}}) \neq \{0_{\mathrm{E}}\}$.

Exercice 1 *Spectre de l'automorphisme réciproque*
Soit u un automorphisme d'un espace vectoriel E.

1. Justifier que $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$.
2. Justifier que $\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \left\{\dfrac{1}{\lambda}, \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\right\}$.

Exercice 2 *Valeur propre nulle et injectivité*
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathrm{E} \neq \{0\}$.

1. Montrer que : $0 \notin \mathrm{Sp}(f) \iff f$ injective.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $0 \in \mathrm{Sp}(f^n) \Rightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(f)$.
3. On suppose f nilpotent. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

Exercice 3 *L'opérateur « dérivation »*
Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathrm{D} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, f \mapsto f'$.
Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de D.

Exercice 4 *L'opérateur « primitivation »*
Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathrm{P} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, f \mapsto \mathrm{F}$ telle que $\begin{cases} \mathrm{F}' = f \\ \mathrm{F}(0) = 0 \end{cases}$.
Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de P.

Exercice 5 *L'opérateur « décalage »*
Soit $\mathrm{E} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0\right\}$ et $\Delta : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, u \mapsto v$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1}$.
Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de Δ.

Exercice 6 *Du côté des projections et des symétries*
Soit F et G deux sous-espaces non triviaux supplémentaires dans un espace E de dimension finie. Soit p et s respectivement la projection sur F respectivement la symétrie d'axe F tous deux de direction G.
En exploitant les relations $p^2 = p$ et $s^2 = id_{\mathrm{E}}$, déterminer les éléments propres de p et s et justifier qu'ils sont diagonalisables.

Exercice 7 *Endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*
Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathrm{M} \mapsto \mathrm{AM} - \mathrm{MA}$.
Déterminer les éléments propres de u.

Exercice 8 *Matrice de rang 1*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $\mathrm{L} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{CL}$.
2. Montrer qu'il existe un scalaire λ tel que $\mathrm{A}^2 = \lambda \mathrm{A}$.
3. Montrer que λ est une valeur propre de A.

Exercice 9 *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{M} \mapsto \mathrm{AM}$.
Montrer que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}(\varphi)$.