1 Séries entières

1.1 Lemme d'Abel

Soit (a_n) suite de nombres complexes. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée, alors pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

1.2 Rayon de convergence

Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est :

$$\mathrm{R} = \sup\{\rho \in \mathbb{R}^+ / (a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} = [\,0\,;\,+\infty].$$

1.3 Disque ouvert et intervalle ouvert de convergence

Version complexe –

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors :

(i) si $|z| < \mathrm{R}$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument,

(ii) si $|z| > \mathrm{R}$, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Version réelle –

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors :

(i) si $x \in \,]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$, alors $\sum a_n x^n$ converge absolument,

(ii) si $x < -\mathrm{R}$ ou $x > \mathrm{R}$, alors $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement.

1.4 Comparaison asymptotique et rayon de convergence

$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ sont deux séries de rayon de convergence respectif R_a et R_b.

- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, alors $\mathrm{R}_a \geq \mathrm{R}_b$.
- Si $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$.

1.5 Deux propriétés bien pratiques

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{RC}\left(\sum n^\alpha z^n\right) = 1$;
- $\sum_{n\geq 0} n a_n z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

1.6 Critère de Jean le Rond D'Alembert pour les séries entières

On suppose qu'il existe n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0, \quad a_n \neq 0$.

Si $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [\,0\,;\,+\infty]$, alors $\mathcal{RC}\left(\sum a_n z^n\right) = \dfrac{1}{\ell} \in [\,0\,;\,+\infty]$.

1.7 Opérations sur les séries entières

- Pour tout $\lambda \neq 0$, $\sum_n \lambda a_n z^n$ et $\sum_n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
- En notant $\mathrm{R}_a = \mathcal{RC}\left(\sum_n a_n z^n\right)$ et $\mathrm{R}_b = \mathcal{RC}\left(\sum_n b_n z^n\right)$,

① si $\mathrm{R}_a \neq \mathrm{R}_b$ alors $\mathcal{RC}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n\right) = \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$,

② si $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$ alors $\mathcal{RC}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n\right) \geqslant min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$.

•**Produit de Cauchy –**

Soit $\forall n \geq 0, c_n \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Alors pour tout z tel que $|z| < \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

1.8 Régularité de la somme d'une série entière

- $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur tout segment $[\,a\,;\,b] \subset \,]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$ de son intervalle ouvert de convergence.
- La somme d'une série entière de rayon $\mathrm{R} > 0$ est $\mathcal{C}^\infty$ et on peut dériver terme à terme :

$$\forall x \in \,]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

$$\forall x \in \,]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$$

1.9 Intégration et primitive

Soit f somme de la série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$.

- Pour tout $[a\,;\,b] \subset]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$, $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\int_a^b t^n \mathrm{d}t\right)$.
- En particulier, la primitive F de f s'annulant en 0 est définie par :

$$\forall x \in]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[, \quad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

1.10 Lien avec le développement de Taylor

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence non nul, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

1.11 Unicité du développement en série entière

- Si $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur $]-r\,;\,r[$ avec $r > 0$ (c'est-à-dire $\forall x \in]-r\,;\,r[, f(x) = g(x)$) alors : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.
- *Corollaire pour les fonctions paires, impaires*

f paire sur $]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$,
f impaire sur $]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0$.

1.12 Développements en série entière de référence

☞ *Variable réelle*

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ et $\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ et $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
- $\forall x \in]-1\,;\,1[, \quad \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
- $\forall x \in]-1\,;\,1[, \quad \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$ et $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.
- $\forall x \in]-1\,;\,1[, \quad \mathrm{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1\,;\,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

☞ *Variable complexe*

- $\forall z \in \mathcal{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}, \quad \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.
- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

1.13 Propriétés de l'exponentielle complexe

- $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.
- $\forall z = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\exp(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$$

2 Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

E désigne un $\mathbb{R}$–espace vectoriel, muni d'un produit scalaire à partir de 3.

2.1 Produit scalaire & norme euclidienne associée

Un *produit scalaire* $\langle .,. \rangle : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{R}, (u,v) \mapsto \langle u, v \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire vérifiant :

(a) φ est *linéaire à gauche* :
$\forall (u,v,w) \in \mathbb{E}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \varphi(\lambda u + v, w) = \lambda \varphi(u,w) + \varphi(v,w)$;

(b) φ est *symétrique* :
$\forall (u,v) \in \mathbb{E}^2, \ \varphi(u,v) = \varphi(v,u)$;
1. et 2. prouvent que φ est *bilinéaire symétrique* (opératoirement parlant $\langle .,. \rangle$ est *distributif et commutatif*).

(c) φ est *positive* :
$\forall u \in \mathbb{E}, \ \varphi(u,u) \geq 0$;

(d) φ est *définie* :
$\forall u \in \mathbb{E}, \ (\varphi(u,u) = 0 \Longrightarrow u = 0)$;
3. et 4. prouvent que φ est *définie positive*.

La *norme euclidienne* associée est
$$\|.\| : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, u \mapsto \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

2.2 **Produits scalaires usuels**

☞ Canonique sur $\mathbb{R}^n$: $\langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$

de norme associée : $\|(x_1,\dots,x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$

Pour ce produit scalaire, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale.

☞ Canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\langle \mathrm{X},\mathrm{Y}\rangle = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}.\mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

(noter que $\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et on identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$)

de norme associée : $\|\mathrm{X}\| = \sqrt{\mathrm{X}^{\mathrm{T}}.\mathrm{X}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$

Pour ce produit scalaire, la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est orthonormale.

☞ Canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}.\mathrm{B}\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} b_{i,j}$

de norme associée : $\|\mathrm{A}\| = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}.\mathrm{B})} = \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2}.$

Pour ce produit scalaire, la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormale.

☞ Sur $\mathcal{C}([a\,;\,b],\mathbb{R})$: $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire.

2.3 **Identités remarquables**... *le p.s. est commutatif et distributif*

$\forall (u,v)\in \mathrm{E}^2, \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$;

$\forall (u,v)\in \mathrm{E}^2, \langle u,v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right).$

$\forall (u,v)\in \mathrm{E}^2, \langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right).$

2.4 **Théorème de Pythagore**

- $u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$
- Si la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthogonale, alors $\left\|\sum_{i=1}^{n} u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2.$

2.5 **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
$$\forall (u,v)\in \mathrm{E}^2, |\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|,$$
avec égalité si, et seulement si, u et v sont colinéaires.

On utilise souvent cette inégalité en l'élevant au carré (évitant les $|.|$ et $\sqrt{.}$) :
$$\forall (u,v)\in \mathrm{E}^2, \langle u,v\rangle^2 \leq \|u\|^2\,\|v\|^2.$$

2.6 **Inégalité triangulaire**
$$\forall (u,v)\in \mathrm{E}^2, \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|,$$
avec égalité si, et seulement si, u et v sont colinéaires *de même sens*, c'est-à-dire :
$$\exists k \in [\,0\,;\,+\infty[, v = ku \text{ ou } u = kv.$$

2.7 **Vecteurs, familles, sous-espaces ortogonaux**

① Par définition : $u \perp v \iff \langle u,v\rangle = 0.$

② La famille $(u_1,\dots,u_p)$ est orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

③ La famille $(u_1,\dots,u_p)$ est orthonormale si ses vecteurs sont unitaires et deux à deux orthogonaux.

Autrement dit :
$$(u_1,\dots,u_p) \text{ est orthonormale ssi } \forall (i,j)\in [\![1\,;\,n]\!]^2,\quad \left\langle u_i,u_j\right\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

④ Les sous-espaces F et G de E sont orthogonaux si
$$\forall (u,v)\in \mathrm{F}\times\mathrm{G}, u \perp v = 0.$$

2.8 **Orthogonal d'un sous-espace**

Soit F un sous-espace de E. On appelle *orthogonal de F*, noté $\mathrm{F}^\perp$, l'ensemble
$$\mathrm{F}^\perp \overset{\text{déf.}}{=} \left\{u\in \mathrm{E} | \forall v\in \mathrm{F}, u\perp v\right\}.$$
$\mathrm{F}^\perp$ est toujours un sous-espace vectoriel de E.

2.9 **Liberté des familles orthogonales et orthonormales**

① Toute famille orthogonale de vecteurs *tous non nuls* est libre.

② Toute famille orthonormale de vecteurs est libre.

2.10 **Caractérisation de l'orthogonalité de sous-espaces**

Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_q)$. Alors
$\mathrm{F} \perp \mathrm{G}$ si, et seulement si, $\forall (i, j) \in [\![1\,;\, p]\!] \times [\![1\,;\, q]\!], \quad u_i \perp v_j$.

2.11 **Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de vecteurs. On pose :

① $e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$;

② successivement pour tout $k \in [\![2\,;\, p]\!]$, $\quad e_k = \dfrac{u_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, e_i \rangle e_i}{\left\| u_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, e_i \rangle e_i \right\|}$.

Alors

① la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormale,

② $\forall k \in [\![1\,;\, p]\!], \quad \mathrm{Vect}\big(u_1, \dots, u_k\big) = \mathrm{Vect}\big(e_1, \dots, e_k\big)$.

2.12 **Espace euclidien**

On appelle *espace euclidien* tout $\mathbb{R}$–espace vectoriel de *dimension finie* muni d'un produit scalaire.

2.13 **Existence et intérêt des bases orthonormales**

① Dans tout espace euclidien, il existe des bases orthonormales.

② Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien E. Alors :

•*coordonnées et norme d'un vecteur :*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.$$

•*produit scalaire de deux vecteurs*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle,$$

$$\langle x, y \rangle = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} \text{ et } \|x\| = \sqrt{\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}} \text{ si } \mathrm{X} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) \text{ et } \mathrm{Y} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y).$$

•*matrice d'un endomorphisme*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{M} = (m_{i,j}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors :

$$\forall (i, j) \in [\![1\,;\, n]\!], \qquad m_{i,j} = \big\langle f(e_j), e_i \big\rangle.$$

2.14 **LE supplémentaire orthogonal d'un sous-espace**

Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien, $\mathrm{F}^{\perp}$, appelé *supplémentaire orthogonal de F*, est caractérisé par les propriétés *équivalentes* suivantes :

① $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp} = \mathrm{E}$ et $\mathrm{F} \perp \mathrm{F}^{\perp}$;

② $\mathrm{F} \perp \mathrm{F}^{\perp}$ et $\dim\big(\mathrm{F}^{\perp}\big) = \dim(\mathrm{E}) - \dim(\mathrm{F})$;

③ pour tout sous-espace G de E, on a : $\mathrm{G} \perp \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{G} \subset \mathrm{F}^{\perp}$;

④ en concaténant une base orthogonale de F et une base orthogonale de $\mathrm{F}^{\perp}$, j'obtiens une base orthogonale de E.

2.15 **Les supplémentaires orthogonaux vont par paire**

$\big(\mathrm{F}^{\perp}\big)^{\perp} = \mathrm{F}$, ou encore : $\big(\mathrm{G} = \mathrm{F}^{\perp}\big) \Longleftrightarrow \big(\mathrm{F} = \mathrm{G}^{\perp}\big)$.

2.16 **Projection orthogonale**

Soit F sous-espace vectoriel de l'espace euclidien E. La projection orthogonale sur F notée p_{F} est la projection sur F dans la direction de (ou parallèlement à) $\mathrm{F}^{\perp}$.

En conséquence des propriétés générales des projecteurs :

$$\mathrm{Im}(p_{\mathrm{F}}) = \mathrm{SEP}(p_{\mathrm{F}}, 1) = \mathrm{F} \text{ et } \mathrm{Ker}(p_{\mathrm{F}}) = \mathrm{SEP}(p_{\mathrm{F}}, 0) = \mathrm{F}^{\perp}.$$

2.17 **Calcul du projeté orthogonal d'un vecteur**

Soit p_{F} la projection orthogonale sur $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. On a :

① $v = p_{\mathrm{F}}(u) \Longleftrightarrow \begin{cases} v \in \mathrm{F} \\ v - u \in \mathrm{F}^{\perp} \end{cases}$

② pour toute base orthonormale $(e_1, \dots, e_m)$ de F, $p_{\mathrm{F}}(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \langle u, e_i \rangle e_i$.

2.18 **Inégalité de Bessel**

$$\forall u \in \mathrm{E}, \quad \|p_{\mathrm{F}}(u)\| \leq \|u\|.$$

2.19 **Meilleure approximation en norme**

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. Soit u un vecteur de E. Alors $\min\limits_{v \in \mathrm{F}} \|u - v\|$ existe et est atteint uniquement pour $v = p_{\mathrm{F}}(u)$:

$$\forall v \in \mathrm{F}, \qquad \Big(v = p_{\mathrm{F}}(u) \quad \Longleftrightarrow \quad \|u - v\| = \min_{w \in \mathrm{F}} \|u - w\|\Big)$$

2.20 **Distance d'un vecteur à un sous-espace**

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. Soit u un vecteur de E. Alors la distance de u à F, notée $d(u, \mathrm{F})$ est définie par

$$d(u, \mathrm{F}) = \min_{v \in \mathrm{F}} \|u - v\| = \|u - p_{\mathrm{F}}(u)\|.$$