Les **exercices de colle** porteront sur la réduction des endomorphismes et la diagonalisation des matrices carrées.

• **La semaine du 24 novembre :** les questions de cours proteront uniquement sur le chapitre *Déterminants*, paragraphe 1 ci-dessous. Mais mieux vaut connaître tout son cours pour résoudre les exercices de réduction.

• **Les semaines des 1er et 8 décembre :** les questions de cours portent sur les deux chapitres ci-dessous.

Table des matières

1 Déterminants **1**

2 Réduction des endomorphismes, diagonalisation des matrices carrées **2**

1 Déterminants

1.1 Règles de calcul

Soit $\mathrm{A} = \big(\mathrm{C}_1|\dots|\mathrm{C}_n\big) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

① La permutation de deux colonnes de A change $\det(\mathrm{A})$ en $-\det(\mathrm{A})$.

② La famille $\big(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_n\big)$ est liée si, et seulement si, $\det(\mathrm{A}) = 0$. ne modifie pas $\det(\mathrm{A})$.

③ L'ajout à C_j d'une combinaison linéaire des autres colonnes de A ne modifie pas $\det(\mathrm{A})$.

④ Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes (il est donc $n-$linéaire).

⑤ $\det\big(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\big) = \det(\mathrm{A})$, donc les **règles** précédentes sont **valables** en travaillant **sur les lignes comme sur les colonnes**.

⑥ En particulier $\det(\lambda\mathrm{A}) = \lambda^n \det(\mathrm{A})$.

1.2 Mineurs et développement

• Le déterminant mineur d'indice (i, j) du déterminant de A noté $\mathrm{M}_{i,j}$, est le déterminant obtenu en supprimant la i-ème et la j-ème colonne de A ;

• **Développement suivant la j-ème colonne ou la i-ème ligne**

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \mathrm{M}_{k,j},$$

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} \mathrm{M}_{i,k}.$$

1.3 Matrices triangulaires, diagonales

Leur déterminant est le produit de leurs coefficients diagonaux.

1.4 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \mathrm{A}_i \end{pmatrix}$ où $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_i$ sont i matrices carrées,

alors $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}_1) \dots \det(\mathrm{A}_i)$.

1.5 Propriétés théoriques

A et B désignent deux matrices carrées de même ordre.

① $\det\big(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\big) = \det(\mathrm{A})$;

② $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$;

③ $\mathrm{A} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \det(\mathrm{A}) \neq 0$, et dans ce cas : $\det\big(\mathrm{A}^{-1}\big) = \dfrac{1}{\det(\mathrm{A})}$;

④ Invariance par similitude :
$$\forall \mathrm{P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \det\big(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\big) = \det(\mathrm{A}) ;$$

⑤ Conséquence : pour $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ (avec $\dim \mathrm{E} < +\infty$), $\det(f) = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f))$ pour n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E.

⑥ $f \in \mathcal{GL}(\mathrm{E}) \Longleftrightarrow \det(f) \neq 0$.

1.6 Déterminant tridiagonal - *(À savoir refaire)*

$$\mathrm{D}_n(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}_n \quad (\text{où } n \geq 3),$$

avec $\mathrm{D}_0(a,b,c) = 1$, $\mathrm{D}_1(a,b,c) = |a|_1 = a$, $\mathrm{D}_2(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix}_2 = a^2 - bc$

se calcule en développant par rapport à première colonne, puis la première ligne : on obtient la relation de récurrence linéaire d'ordre deux :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{D}_{n+2}(a,b,c) = a\mathrm{D}_{n+1}(a,b,c) - bc\mathrm{D}_n(a,b,c).$$

1.7 **Déterminant de Vandermonde**

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

Le déterminant de Vandermonde des points $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est

$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) = \det\left(\left((a_i^{j-1})\right)\right) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

On a :

$\mathrm{V}(a_1) = 1$, et,

$$\forall n \geq 2,\ \mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) = \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (a_j - a_i).$$

2 Réduction des endomorphismes, diagonalisation des matrices carrées

2.1 • $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre de l'endomorphisme** $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ ssi

$$\exists u \in \mathrm{E}, u \neq 0 \text{ tel que } f(u) = \lambda u.$$

• $u \in \mathrm{E}$ est un **vecteur propre de l'endomorphisme** $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ ssi

$$u \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } f(u) = \lambda u.$$

• Le **spectre** de f noté $\mathrm{Sp}(f)$ est l'ensemble des ses valeurs propres.

• Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ de f est

$$\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{SEP}(f, \lambda) = \{u \in \mathrm{E} / f(u) = \lambda u\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}).$$

2.2 • $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre de la matrice** $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ssi

$$\exists \mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \mathrm{U} \neq 0 \text{ tel que } \mathrm{MU} = \lambda \mathrm{U}.$$

• $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un **vecteur propre de la matrice** (parfois appelée colonne propre) $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ssi

$$\mathrm{U} \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } \mathrm{MU} = \lambda \mathrm{U}.$$

• Le **spectre** de M noté $\mathrm{Sp}(\mathrm{M})$ est l'ensemble des ses valeurs propres.

• Le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ de M est

$$\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{SEP}(\mathrm{M}, \lambda) = \{\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / \mathrm{MU} = \lambda \mathrm{U}\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n).$$

2.3 Le **polynôme caractéristique de l'endomorphisme** $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est le polynôme $\chi_f(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{X} id_{\mathrm{E}} - f)$.

• On a, pour E de dimension n, $\chi_f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n - \mathrm{Tr}(f)\,\mathrm{X}^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(f)$.

2.4 Le **polynôme caractéristique de la matrice** $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le polynôme $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{X}\mathrm{I}_n - \mathrm{M})$.

• On a, pour $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n - \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\,\mathrm{X}^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(\mathrm{M})$.

2.5 **Cas particulier des matrices triangulaires**

• Les valeurs propres d'une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) $\mathrm{T} = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \{t_{i,i} / i \in [\![1\,;\ n]\!]\}.$$

• Son polynôme caractéristique est alors $\chi_{\mathrm{T}}(\mathrm{X}) = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - t_{i,i})$.

2.6 **Caractérisation des valeurs propres** d'un endomorphisme

Il y a équivalence entre :

• $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$

• $\mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) \neq \{0\}$

• $\mathrm{rg}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) < \dim(\mathrm{E})$

• $\chi_f(\lambda) = 0$ (λ est une racine du polynôme caractéristique de f).

2.7 **Caractérisation des valeurs propres** d'une matrice d'ordre n

Il y a équivalence entre :

• $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$

• $\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n$ n'est pas inversible

• $\mathrm{rg}(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n) < n$

• $\chi_{\mathrm{M}}(\lambda) = 0$ (λ est une racine du polynôme caractéristique de M).

2.8 **Multiplicité d'une valeur propre**

On appelle multiplicité de la valeur propre λ notée $\mu(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique.

2.9 **Polynômes et éléments propres**

① Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $(\lambda, u) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}$ tels que $\varphi(u) = \lambda u$. Alors :

(i) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi^k(u) = \lambda^k u$,

(ii) $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}], \quad \mathrm{P}(\varphi)(u) = \mathrm{P}(\lambda) u$. [Remarque : $\mathrm{P}(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\mathrm{P}(\lambda) \in \mathbb{K}$]

② Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda, \mathrm{U}) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $\mathrm{MU} = \lambda\mathrm{U}$. Alors :
(i) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}^k\mathrm{U} = \lambda^k\mathrm{U}$,
(ii) $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}], \quad \mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{U} = \mathrm{P}(\lambda)\mathrm{U}$. [Remarque : $\mathrm{P}(\mathrm{M}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{P}(\lambda) \in \mathbb{K}$]

2.10 **Polynômes annulateurs et valeurs propres**

① Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme annulateur de $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors les valeurs propres de φ sont parmi les racines de P.

② Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme annulateur de $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les valeurs propres de M sont parmi les racines de P.

2.11 **Théorème de Cayley-Hamilton**

① Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors $\chi_\varphi(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

② Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = 0_n$.

2.12 **À propos des sous-espace propre** version endomorphisme

- Des SEP associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors $\dim \mathrm{SEP}(f, \lambda) = \dim \mathrm{E} - \mathrm{rg}(f - \lambda id_\mathrm{E})$.
- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors $1 \leq \dim \mathrm{SEP}(f, \lambda) \leq \mu(\lambda)$.

2.13 **À propos des sous-espace propre** version matrice

- Des SEP associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$, alors $\dim \mathrm{SEP}(\mathrm{M}, \lambda) = \dim \mathrm{E} - \mathrm{rg}(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n)$.
- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$, alors $1 \leq \dim \mathrm{SEP}(\mathrm{M}, \lambda) \leq \mu(\lambda)$.

2.14 **Diagonalisabilité**

- En dimension finie, un **endomorphisme** est dit **diagonalisable** s'il existe une base formée de vecteur propre (car la matrice le représentant dans cette base est alors diagonale).
- Une **matrice carrée** est dite **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

2.15 **Condition suffisante de diagonalisabilité**

- Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Soit f un endomorphisme de E. Si $\mathrm{C}ard(\mathrm{Sp(F)}) = dim(\mathrm{E})$, alors f est diagonalisable et ses n sous-espaces propres sont de dimension 1.

- Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\mathrm{C}ard(\mathrm{Sp(M)}) = n$, alors M est diagonalisable et ses n sous-espaces propres sont de dimension 1.
- Si χ_f (resp. χ_M) est scindé à racines simples, alors f (resp. M) est diagonalisable et ses n sous-espaces propres sont de dimension 1.

2.16 **Théorème général de diagonalisabilité** version endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit f un endomorphisme de E. Il y a équivalence entre :

- f est diagonalisable ;
- il existe une base de E formée de vecteurs propres de f ;
- les sous-espaces propres de f sont supplémentaires dans E ;
- $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(\mathrm{E}_\lambda) = \dim(\mathrm{E})$;
- χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f), \dim \mathrm{E}_\lambda = \mu(\lambda)$;
- il existe un polynôme scindé à racines simple annulateur de f.

2.17 **Théorème général de diagonalisabilité** version matrice

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre :

- M est diagonalisable ;
- il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de M ;
- les sous-espaces propres de M sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
- $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp(M)}} \dim(\mathrm{E}_\lambda) = n$;
- χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$ et : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp(M)}, \dim \mathrm{E}_\lambda = \mu(\lambda)$;
- il existe un polynôme scindé à racines simple annulateur de M.

2.18 **Trigonalisabilté**

- Un **endomorphisme** d'un espace de dimension finie E est dit **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice le représentant est triangulaire.
- Une **matrice carrée** est dite **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire.

2.19 **Théorème de trigonalisabilité**

- Un endomorphisme d'un espace de dimension finie, respectivement une matrice carrée, est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, endomorphisme d'un espace de dimension finie, respectivement toute matrice carrée, est trigonalisable.

2.20 **Cas des matrices symétriques réelles**

Toute matrice symétrique réelle S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, toutes ses valeurs propres sont réelles et χ_S est scindé sur $\mathbb{R}$.