Les colles portent sur **l'algèbre linéaire de première année ainsi que les compléments décrits ci-après**, à l'exception des notions de produit scalaire et d'orthogonalité (**pas d'algèbre euckidienne**).

Les questions de cours porteront exclusivement sur les points énoncés sur cette fiche.

Les exercices consisteront en l'étude d'endomorphismes **en dimension 3 ou 4** vérifiant les savoir-faire de première année d'algèbre linéaire (recherche de noyaux, images, justification de supplémentarité, calculs guidés [1] de puissances n-ème de matrices, etc.).

1 Compléments d'algèbre linéaire

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Trace d'une matrice carrée

- $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \mathrm{M} = (m_{1\leqslant i,j\leqslant n}) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$ est une forme linéaire ;
- $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{BA})$;
- $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{K}$ et $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = n^2 - 1$.

1.2 Trace d'un endomorphisme en dimension finie

- $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \forall \mathrm{P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \quad \big(\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\big) \Longrightarrow \big(\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\big)$;
- si E est de dimension finie et φ est un endomorphisme de E, toutes les matrices représentant φ ont la même trace, appelée *trace de l'endomorphisme φ.*

1.3 Sous-espace stable par un endomorphisme et endomorphisme induit

- Le sous-espace vectoriel F de l'espace vectoriel E est *stable* par l'endomorphisme φ de E si $\varphi(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$, autrement dit si
$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad \varphi(x) \in \mathrm{F}.$$
- Si F est un sous-espace de E stable par φ, on appelle endomorphisme *induit* par φ sur F l'endomorphisme φ_{F} défini par
$$\varphi_{\mathrm{F}} : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}, x \longmapsto \varphi(x).$$

Remarque : on l'appelle parfois aussi *restriction* de φ à F.

1.4 Somme de $p \geqslant 2$ sous-espaces vectoriels

- Soit $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_p$ p sous-espaces vectoriels de E. On appelle *somme* de ces sous-espaces, notée $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ l'ensemble des vecteurs de E s'écrivant comme une somme de vecteurs des F_i ;
- $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i = \left\{ \sum_{i=1}^{p} f_i | \forall i \in [\![1\,;\ p]\!], f_i \in \mathrm{F}_i \right\} = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i \right)$.

1. sans diagonalisation...

1.5 Somme directe de $p \geqslant 2$ sous-espaces vectoriels

- La somme $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ est dite directe si, et seulement si, pour tout vecteur x de cette somme, la décomposition $x = \sum_{i=1}^{p} f_i$ avec $\forall i \in [\![1\,;\ p]\!], f_i \in \mathrm{F}_i$ est unique ;
- Dans ce cas on la note $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$.

1.6 Caractérisation des sommes directes

Il y a équivalence entre :

- la somme $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ est directe ;
- si $\sum_{i=1}^{p} f_i = 0_{\mathrm{E}}$ avec $\forall i \in [\![1\,;\ p]\!], f_i \in \mathrm{F}_i$ alors $\forall i \in [\![1\,;\ p]\!], f_i = 0_{\mathrm{E}}$ (la décomposition de 0_{E} est unique) ;
- **en dimension finie,** en concaténant des bases respectives des F_i pour $1 \leqslant i \leqslant p$, on obtient une base de $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$.

1.7 Sous-espaces supplémentaires

Les p sous-espaces F_i de E sont dits supplémentaires si, et seulement si,
$$\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i.$$

1.8 Caractérisation de la supplémentarité

En dimension finie, il y a équivalence entre :

- $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$;
- $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \exists!(f_1, f_2, \ldots, f_p) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \cdots \times \mathrm{F}_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} f_i$;
- $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ est directe et $\sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{F}_i) = \dim(\mathrm{E})$;
- $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i = \mathrm{E}$ et $\sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{F}_i) = \dim(\mathrm{E})$;
- en concaténant des bases respectives des F_i pour $1 \leqslant i \leqslant p$, on obtient une base de E.

1.9 Base adaptée à une supplémentarité

On suppose que $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$. Alors toute base de E obtenue en concaténant des bases respectives des F_i est appelée *base adaptée à cette supplémentarité.*

1.10 Sous-espaces supplémentaires et stables par un endomorphisme

On suppose E de dimension finie et $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$.

Soit φ un endomorphisme de E. Si, pour tout i de $[\![1\,;\ p]\!]$, le sous-espace F_i est stable par φ, alors dans toute base adaptée à cette supplémentarité, la matrice représentant φ est diagonale par blocs.

1.11 Polynômes d'endomorphismes et polynômes de matrices carrées

• Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Pour tout endomorphisme φ de E, on note $\mathrm{P}(\varphi)$ l'**endomorphisme**

$$\mathrm{P}(\varphi) = \sum_{k=0}^{d} a_k \varphi^k = a_d \varphi^d + \cdots + a_1 \varphi + a_0 id_{\mathrm{E}}.$$

• Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Pour toute matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ la **matrice**

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{A}^k = a_d \mathrm{A}^d + \cdots + a_1 \mathrm{A} + a_0 \mathrm{I}_n.$$

1.12 Commutation et produit

Soit $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2$.

(i) $\forall \varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E}), \quad \mathrm{P}(\varphi) \circ \mathrm{Q}(\varphi) = (\mathrm{PQ})(\varphi) = (\mathrm{QP})(\varphi) = \mathrm{Q}(\varphi) \circ \mathrm{P}(\varphi)$,

(ii) $\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{Q}(\mathrm{A}) = (\mathrm{PQ})(\mathrm{A}) = (\mathrm{QP})(\mathrm{A}) = \mathrm{Q}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{A})$,

(iii) $\forall \varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E}), \quad \mathrm{Ker}(\mathrm{P}(\varphi))$ est stable par φ.

1.13 Polynômes annulateurs

Un polynôme P de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est dit *annulateur* de la matrice A (respectivement de l'endomorphisme φ) si, et seulement si, $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0_n$ (respectivement $\mathrm{P}(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$).