1 Variables aléatoires discrètes

1.1 **Variable aléatoire réelle**

Une variable aléatoire discrète X sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$ est une fonction définie sur Ω telle que l'univers image $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et telle que pour tout x de $X(\Omega)$, l'image réciproque $X^{-1}(\{x\}) \overset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$ soit un élément de $\mathcal{T}$ (c'est-à-dire un événement).

Pour toute partie $U \subset X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(U) \overset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in U\}$ est un événement.

L'événement $X^{-1}(U)$ est noté $[X \in U]$ ou $(X \in U)$ ou $\{X \in U\}$.

Si par exemple $U =]-\infty\,; a]$, $X^{-1}(U)$ se notera plus simplement $[X \leqslant a]$.

1.2 **Système complet engendré par une VARD**

En notant $X(\Omega) = \{x_n / n \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$, la famille $\big([X = x_n]\big)_{n\in I}$ est un système complet d'événements. En particulier, $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = \sum_{n\in I} P([X = x_n]) = 1$.

1.3 **Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles**

Loi conjointe de X *et* Y *ou du couple* (X, Y) *:*

donnée des $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}\big((X, Y) = (x, y)\big)$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Lois marginales :

ce sont simplement les lois de X et de Y.

Loi conditionnelle de Y *sachant* $[X = x]$ *:*

donnée des $P_{[X=x]}(Y = y)$ pour tout $y \in Y(\Omega)$.

Relations entre ces lois : par la formule des probabiltés totales,

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y),$$

et, par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}_{[X=x]}(Y = y) = \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}_{[Y=y]}(X = x)$$

1.4 **VAD indépendantes**

Dire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes signifie

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y).$$

1.5 **Propriétés d'indépendance**

Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toutes parties A de $X(\Omega)$ et B de $Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}([X \in A] \cap [Y \in B]) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toutes fonctions f et g telles que $f(X)$ et $g(Y)$ soient bien définies, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

1.6 **Variables aléatoires mutuellement indépendantes**

Les VAD $(X_n)_{n\in I}$ sont (mutuellement) indépendantes si pour tout $J \subset I$ fini et toute famille de parties $(A_j)_{j\in J}$ telles que $A_j \subset X_j(\Omega)$ pour tout j,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} [X_j \in A_j]\Big) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}\big(X_j \in A_j\big)$$

1.7 **Suite de VA i.i.d**

Lorsqu'on a une suite de variables aléatoires toutes de même loi et mutuellement indépendantes, on parle de suite de V.A. « i.i.d. », acronyme de « indépendantes identiquement distribuées ».

1.8 **Espérance**

On note $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ l'univers image de la variable aléatoire X. Dire que la variable aléatoire X est d'espérance finie signifie que la série de terme général $x_n\mathbb{P}(X = x_n)$ est **absolument convergente**. Si tel est le cas, l'espérance de la variable aléatoire X est la somme de cette série, notée $\mathbb{E}(X)$.

Dans la pratique, en probabilités et uniquement en probabilités (donc pas en analyse), on est autorisé à écrire

$$\mathbb{E}(|X|) = \sum_{i\in I} |x_i|\,\mathbb{P}(X = x_i) = \dots$$

sans avoir au préalable justifier la convergence de la série, sachant qu'en cas de divergence, il s'agira d'une divergence vers $+\infty$. Il faudra penser à l'issue du calcul à observer que la somme est finie, ou pas.

1.9 **Espérance par anti-répartition**

Dans le cas où X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X)$ est finie si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geqslant n)$ converge, et dans ce cas :$\displaystyle\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$.

1.10 **Transfert**

Soit f une fonction définie sur l'univers image $X(\Omega) = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. La variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série de terme général $f(x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$ converge **absolument**. Si c'est le cas, on obtient alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}(X = x_n).$$

En particulier,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2\mathbb{P}(X = x_n).$$

1.11 **Transfert pour un couple**

De même, en cas de convergence absolue, alias de sommabilité de la famille double $(f(x,y)\mathbb{P}(X=x,Y=y))_{x\in X(\Omega),y\in Y(\Omega)}$

$$\mathbb{E}(f(X,Y)) = \sum_{x\in X(\Omega),y\in Y(\Omega)} f(x,y)\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

où la somme est la somme d'une série double.

En particulier,

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x\in X(\Omega),y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

1.12 Linéarité de l'espérance, positivité, croissance

Si $\mathbb{E}(X)$ existe, alors $\mathbb{E}(aX+b)$ existe et vaut $a\mathbb{E}(X)+b$.

Si $\forall i\in[\![1\,;\,n]\!], \mathbb{E}(X_i)$ existent, alors $\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i\Big)$ existe et vaut $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathbb{E}(X_i)$.

Si $\forall\omega\in\Omega, 0\le X(\omega)$ et $\mathbb{E}(X)$ existe, alors $0\le\mathbb{E}(X)$.

Si $\forall\omega\in\Omega, X(\omega)\le Y(\omega)$ et $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ existent, alors $\mathbb{E}(X)\le\mathbb{E}(Y)$.

1.13 Espérance du produit de VARD indépendantes

Si X et Y sont indépendantes et possèdent une espérance, alors XY possède une espérance et $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

1.14 Moments d'ordre 2

Si X^2 est d'espérance finie, alors X l'est aussi.

Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi.

1.15 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi, et

$$\mathbb{E}(XY)^2\leqslant\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$$

avec égalité si, et seulement si, $\exists\lambda\in\mathbb{R}, \mathbb{P}(Y=\lambda X)=1$.

1.16 Variance, écart-type

Si X^2 est d'espérance finie, alors $(X-\mathbb{E}(X))^2$ aussi et

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\Big((X-\mathbb{E}(X))^2\Big) \text{ et } \sigma(X)=\sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

En particulier, comme $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\Big((X-\mathbb{E}(X))^2\Big)$, $\mathbb{V}(X)\geqslant 0$.

1.17 Transformation affine, formule de König-Huygens

$\forall(a,b)\in\mathbb{R}, \mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)$ dès que $\mathbb{V}(X)$ existe.

$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\Big(\mathbb{E}(X)\Big)^2$ dès que $\mathbb{E}(X^2)$ existe.

1.18 Interprétation de la nullité de la variance

$\mathbb{V}(X)=0\Rightarrow\mathbb{P}(X=\mathbb{E}(X))=1$: X presque-sûrement égale à $\mathbb{E}(X)$, donc constante.

1.19 Covariance

Sous réserve d'existence (en particulier dès que X^2 et Y^2 possèdent une espérance) :

$\mathrm{Cov}(X,Y)\overset{\text{déf.}}{=}\mathbb{E}\Big((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\Big)$.

1.20 Formule de König-Huygens

Sous réserve d'existence (en particulier dès que X^2 et Y^2 possèdent une espérance) :

$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

1.21 Bilinéarité et symétrie de la covariance

Sous réserve d'existence :

$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X),\quad \mathrm{Cov}(X,X)=\mathbb{V}(X)$,

$\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d)=ac\mathrm{Cov}(X,Y)$.

$\mathrm{Cov}\Big(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i X_i,\sum_{j=1}^{n}\mu_j Y_j\Big)=\sum_{(i,j)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]}\lambda_i\mu_j\mathrm{Cov}(X_i,Y_j)$

1.22 Variance d'une somme

Sous réserve d'existence : $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$,

et formule polaire : $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{2}\Big(\mathbb{V}(X+Y)-\mathbb{V}(X)-\mathbb{V}(Y)\Big)$.

1.23 Cas où les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes

Si $X_1,\dots,X_n$ sont n VARD deux à deux indépendantes,

$\forall i\neq j, \mathrm{Cov}(X_i,X_j)=0$,

$\mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)$.

1.24 Série génératrice

La série génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans N est la série entière $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(X=n)t^n$. Son rayon de convergence vaut au moins 1.

1.25 Fonction génératrice

La fonction génératrice de X est alors la fonction

$$G_X : t\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)t^n=\mathbb{E}(t^X).$$

1.26 Caractérisation de la loi

Si $G_X=G_Y$ sur $[0\,;\,1]$, alors X et Y suivent la même loi.

1.27 Lien avec les moments

L'existence de $\mathbb{E}(X)$ équivaut à la dérivabilité de G_X en 1. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X)=G_X'(1).$$

☞ On pourra remarquer qu'en itérant le procédé, on peut montrer que l'existence de $\mathbb{V}(X)$ équivaut à l'existence de $G''_X(1)$, et dans ce cas, $G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$ donc
$$\mathbb{V}(X) = \Big(G''_X(1) + G'_X(1)\Big) - \Big(G'_X(1)\Big)^2.$$

1.28 **Fonction génératrice d'une somme de VARD indépendantes**

Pour X et Y sont indépendantes, la fonction génératrice G_{X+Y} vaut $G_X G_Y$.

Cette propriété permet de justifier rapidement les stabilités suivantes.

1.29 **Décompositions en somme et stabilités remarquables (hors programme)**

• Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, X peut être vue comme la somme de n variables $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ indépendantes, indicatrices de l'événement « *la i-ème épreuve est un succès* », toutes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

• Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sont k variables *indépendantes* de loi binomiale respectivement $\mathcal{B}(n_1,p)$, $\mathcal{B}(n_2,p)$, …, $\mathcal{B}(n_k,p)$ (le même paramètre p pour toutes), alors $X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ suit $\mathcal{B}(n_1 + n_2 + \cdots + n_k, p)$.

• Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sont k variables *indépendantes* de loi de Poisson respectivement $\mathcal{P}(\lambda_1)$, $\mathcal{P}(\lambda_2)$, …, $\mathcal{P}(\lambda_k)$, alors $X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ suit $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k, p)$.

1.30 **Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev**

Inégalité de Andreï Andreïevitch Markov : soit X positive possédant une espérance, alors
$$\forall \alpha > 0,\ \mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\alpha}$$
Inégalité de Jules Irénée Bienaymé–Pafnouti Tchebychev : soit X possédant un moment d'ordre 2 (i.e. $\mathbb{E}(X^2)$ existe), alors
$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

1.31 **Loi faible des grands nombres**

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. On suppose que $(X_1)^2$ est d'espérance finie. On note $m = E(X_1)$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

Interprétation : la moyenne expérimentale est probablement proche de la moyenne théorique.

1.32 **Minimum de deux géométrique indépendantes (hors programme)**

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(q)$ sont indépendantes, alors $\min(X,Y) \sim \mathcal{G}(p+q-pq)$. En effet, on dispose de deux pièces, l'une amenant pile avec la probabilité p, l'autre avec la probabilité q. On répète des lancers simultanés des deux pièces, et on note Z le rang du premier succès S : « *obtenir un pile sur l'une (au moins) des deux pièces* ». On a clairement $Z = \min(X,Y)$ mais aussi $Z \sim \mathcal{G}\big(\mathbb{P}(S)\big)$… et $\mathbb{P}(S) = p + q - pq$.

Lois discrètes usuelles

Nom	Paramètre(s)	Logo	Support $X(\Omega) =$	Loi : $\forall k \in X(\Omega)$ $\mathbb{P}(X=k) =$	Espérance $\mathbb{E}(X) =$	Variance $\mathbb{V}(X) =$	Fonction génératrice $G_X : t \mapsto$	Particularité
Uniforme	$\{x_1,\ldots,x_n\}$	$\mathcal{U}\big(\{x_1,\ldots,x_n\}\big)$	$\{x_1,\ldots,x_n\}$	$\frac{1}{n}$	*Pas de*	*formule*	*générale (☞ définitions)*	Situation d'équiprobabilité
Uniforme	$\{1,\ldots,n\}$	$\mathcal{U}\big([\![1\,;n]\!]\big)$	$[\![1\,;n]\!]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\begin{cases} \frac{t}{n} \times \frac{1-t^n}{1-t} & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$	Situation d'équiprobabilité
Bernoulli	$p \in]0\,;1[$	$\mathcal{B}(p)$	$\{0,1\}$	$\begin{cases} p & \text{si } k=1 \\ 1-p & \text{si } k=0 \end{cases}$	p	$p(1-p)$	$(1-p)+pt$	X indicatrice de l'événement $[X=1]$, appelé *succès*
Binomiale	$n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0\,;1[$	$\mathcal{B}(n,p)$	$[\![0\,;n]\!]$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$\big((1-p)+pt\big)^n$	Nombre de succès en n épreuves de Bernoulli indépendantes
Géométrique	$p \in]0\,;1[$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pt}{1-(1-p)t}$	Rang du 1er succès dans un schéma de Bernoulli
Poisson	$\lambda \in]0\,;+\infty[$	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$	Approximation de $\mathcal{B}(n,\lambda/n)$ quand n devient grand