Exercice 1 *Étude d'une fonction définie comme somme d'une série*

On pose, pour $x>0$ et sous réserve d'existence,
$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+n^2x}.$$

1. **Convergence simple**
   Justifier que S est définie sur $]0\,;+\infty[$.
   Pour tout $(n,x)\in\mathbb{N}^*\times]0\,;+\infty[$ on pose $h_n(x)=\dfrac{1}{n+n^2x}$.
2. **Exemple de passage du local au global : continuité**
   a) La série de fonctions $\sum h_n$ converge-t-elle normalement sur $]0\,;+\infty[$?
   b) Soit $a\in]0\,;+\infty[$. Justifier que la série de fonctions $\sum h_n$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$.
   c) En déduire que S est continue sur $]0\,;+\infty[$.
3. **Variations sans dérivation**
   Sans chercher à dériver S, montrer que S est strictement décroissante.
4. **Dérivabilité et classe : variations et convexité**
   a) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et retrouver sa variation.
   b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe.
5. **Utilisations du théorème de la double limite : comportement en $+\infty$**
   a) À l'aide du théorème de la double limite, justifier : $S(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.
   b) On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Justifier que $S(x)\leqslant\dfrac{\pi^2}{6x}$ et retrouver la limite précédente.
   c) À l'aide du théorème de la double limite, établir que $S(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi^2}{6x}$.
   d) À l'aide du théorème de la double limite au voisinage de 0, montrer que la convergence de la série $\sum h_n$ n'est pas uniforme sur $]0\,;+\infty[$.
6. **Comparaison série-integrale : comportement en 0**
   a) Montrer que
   $$\forall x>0,\quad S(x)-\frac{1}{x+1}\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)}\leqslant S(x).$$
   b) En déduire : $S(x)\underset{x\to0}{\sim}-\ln(x)$.
7. **Représentation graphique**
   a) Calculer S(1).
   b) Représenter graphiquement S en tenant compte de tous les éléments obtenus au cours de cette étude.

Solution (**Ex.1 –** *Étude d'une fonction définie comme somme d'une série*)

On pose, pour $x>0$ et sous réserve d'existence, $\quad S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+n^2x}$.

1. Pour $x\in]0\,;+\infty[$, $0\leqslant h_n(x)\leqslant\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{n^2}$, donc $\sum_n h_n(x)$ converge par comparaison.
   Donc S est définie sur $]0\,;+\infty[$.
2. a) $\|h_n\|_\infty=\dfrac{1}{n}$ donc la série de fonctions $\sum h_n$ ne converge pas normalement sur $]0\,;+\infty[$.
   b) Soit $a\in]0\,;+\infty[$. $\|h_n\|_{\infty,[a\,;+\infty[}=\dfrac{1}{n+n^2a}\leqslant\dfrac{1}{an^2}$ donc la série de fonctions $\sum h_n$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$.
   c) Pour $a>0$, les fonctions h_n sont toutes continues sur $[a\,;+\infty[$ et la convergence est normale donc uniforme, donc S est continue sur $[a\,;+\infty[$. Comme ceci est vrai pour tout $a>0$, S est continue sur $]0\,;+\infty[$.
3. Soit $0<x<y$. $S(x)-S(y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(h_n(x)-h_n(y)\Big)>0$ car $\forall n, h_n(x)>h_n(y)$. Donc S est strictement décroissante.
4. Pour tout $n\geqslant1$, h_n est de classe $\mathcal{C}^2$.
   $\forall n\geqslant1,\forall x>0, h_n'(x)=\dfrac{-1}{(1+nx)^2}$ et $h_n''(x)=\dfrac{2n}{(1+nx)^3}$.
   Soit $a>0$. Les majorations $\|h_n'\|_{\infty,[a\,;+\infty[}\leqslant\dfrac{1}{a^2n^2}$ et $\|h_n''\|_{\infty,[a\,;+\infty[}\leqslant\dfrac{2}{a^3n^3}$ justifient la convergence normale donc uniforme des séries $\sum_n h_n'$ et $\sum_n h_n''$ sur tout $[a\,;+\infty[\subset]0\,;+\infty[$.
   Ainsi S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$ et S′ et S″ se calculent par dérivation terme à terme. D'où $S'<0$ et $S''>0$: S est strictement décroissante et convexe.
5. **Utilisations du théorème de la double limite : comportement en $+\infty$**
   a) S converge normalement donc uniformément sur $[1\,;+\infty[$, et pour tout $n\geqslant1, h_n(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. Le théorème de la double limite justifie alors que : $S(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.
   b) $\forall x>0,\forall n\geqslant1, 0\leqslant h_n(x)\leqslant\dfrac{1}{n^2x}$, d'où $0\leqslant S(x)\leqslant\dfrac{\pi^2}{6x}$ et par encadrement $S(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

c) Posons $g_n : [1\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x h_n(x) = \dfrac{x}{n+n^2x}$.

$g_n'(x) = \dfrac{n+n^2x-n^2x}{(n+n^2x)^2} > 0$ donc $\|g_n\|_\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = \dfrac{1}{n^2}$.

La convergence de $\sum_n g_n$ est normale donc uniforme sur $[1\,;\,+\infty[$, donc par le théorème de la double limite, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, i.e. $x\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{\pi^2}{6}$. Ainsi $\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6x}$.

d) Si la convergence était uniforme sur $]0\,;\,+\infty[$, puisque $h_n(x) \xrightarrow[x\to0]{} \dfrac{1}{n}$, la série $\sum_n \dfrac{1}{n}$ convergerait... ce qui est absurde.

6. Comparaison série-integrale : comportement en 0

a) $\forall x>0, \forall n \geqslant 1, h_{n+1}(x) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x} \leqslant h_n(x)$.

En sommant pour n parcourant $\mathbb{N}^*$,

$$\forall x>0,\quad \mathrm{S}(x) - \frac{1}{x+1} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} \leqslant \mathrm{S}(x).$$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}\mathrm{d}t = \left[\ln\frac{t}{1+tx}\right]_1^{+\infty} = -\ln(x) + \ln(1+x)$

Ainsi : $\forall x>0, -\ln(x)+\ln(1+x) \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant -\ln(x) + \ln(x+1) + \dfrac{1}{1+x}$.

En divisant par $-\ln(x)$, on obtient $\dfrac{\mathrm{S}(x)}{-\ln(x)} \xrightarrow[x\to0]{} 1$, i.e. $\mathrm{S}(x) \underset{x\to0}{\sim} -\ln(x)$.