Exercice 1 *CVN sur les segments*

Étudier la convergence normale sur $[0\,;+\infty[$, puis sur $[0\,;a]$ (où $a>0$) de :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^n\mathrm{e}^{-x}}{n!}$$

Solution (**Ex.1 –** *CVN sur les segments*)

1. Soit : $h_n(x)\overset{\text{déf.}}{=}\dfrac{x^n\mathrm{e}^{-x}}{n!}\quad(n\geq 0,\ x\in[0\,;+\infty[)$
Par croissance comparée : $\forall x\in[0\,;+\infty[,\quad h_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
Soit $x\in\mathbb{R}$. Par convergence de la série exponentielle, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}h_n(x)$ existe et vaut $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}=1$. Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0}h_n$ converge simplement vers la fonction constante $h:x\mapsto 1$.
Évaluons $\|h_n\|_\infty$.
$\forall x\in[0\,;+\infty[,\quad h_n'(x)=\dfrac{x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}}{n!}(n-x)$: h_n est croissante sur $[0\,;n]$ et décroissante sur $[n\,;+\infty[$, avec $h_n(0)=\displaystyle\lim_{x\to+\infty}h_n(x)=0$, donc $\|h_n\|_\infty=h_n(n)=\dfrac{n^n\mathrm{e}^{-n}}{n!}$.
Par l'équivalent de Stirling : $\|h_n\|_\infty\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, donc puisque $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, par le critère des équivalents pour ces termes généraux positifs, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\|h_n\|_\infty$ diverge et il n'y a pas convergence normale sur $[0\,;+\infty[$.
Cependant, il y a convergence normale sur tout segment $[0\,;a]$ car dès que $n\geq a$, $\|h_n\|_{\infty,[0\,;a]}=h_n(a)=\dfrac{a^n\mathrm{e}^{-a}}{n!}$, qui est le terme général d'une série exponentielle convergente.

Exercice 2 *Série de fonctions dépendant d'une suite numérique*

Soit $n_0\in\mathbb{N}$, $(a_n)_{n\geq n_0}$ une suite positive décroissante, et $(f_n)_{n\geq n_0}$ la suite de fonctions définies par : $\quad\forall x\in[0\,;1],\quad f_n(x)=a_nx^n(1-x)$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}f_n$ converge simplement sur $[0\,;1]$.
2. Étudier le mode de convergence dans le cas $n_0=1$ et $a_n=1/n$, puis dans le cas $n_0=2$ et $a_n=1/\ln(n)$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq n_0}f_n$ converge normalement si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}a_n/n$ converge.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq n_0}f_n$ converge uniformément si, et seulement si $a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Solution (**Ex.2 –** *Série de fonctions dépendant d'une suite numérique*)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, décroissante et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par : $\quad\forall x\in[0\,;1],\quad f_n(x)=a_nx^n(1-x)$.

1. • Pour $x=1$, $f_n(x)=0$ $(\forall n)$ donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0}f_n(x)$ converge.
• Pour $x\in[0\,;1[$, $0\leq f_n(x)\leq a_0x^n$ donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0}f_n(x)$ converge par comparaison à la série géométrique de raison $x\in[0\,;1[$.
Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0}f_n$ converge simplement.
2. Soit $g_n:[0\,;1]\to\mathbb{R}, x\mapsto x^n(1-x)$. Alors :
• $g_n(0)=g_n(1)=0$;
• $\forall x\in[0\,;1], g_n'(x)=x^{n-1}(n-(n+1)x)$, donc g_n est maximale en $x=\dfrac{n}{n+1}$, et ainsi $\|g_n\|_\infty=g_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)=\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\dfrac{1}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n$.
De $n\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}n\dfrac{-1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}-1$ on tire $\|g_n\|_\infty\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{en}$.
• Pour $a_n=\dfrac{1}{n}$, on a : $\|f_n\|_\infty\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{en^2}$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\|f_n\|_\infty$ converge normalement (par équivalence au terme général de la série de Riemann). Donc elle converge aussi uniformément.
• Pour $a_n=\dfrac{1}{\ln n}$, on a : $\|f_n\|_\infty\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{en\ln n}$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\|f_n\|_\infty$ diverge. En effet, c'est une série de Bertrand dont on établit la divergence par le théorème de comparaison série/intégrale :
$\varphi:t\mapsto\dfrac{1}{t\ln t}$ est continue, positive et décroissante donc $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\varphi(n)$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature. Or $\displaystyle\int_2^{\mathrm{A}}\varphi(t)\mathrm{d}t=\ln\big(\ln\mathrm{A}\big)-\ln\big(\ln 2\big)\xrightarrow[\mathrm{A}\to+\infty]{}+\infty$...
Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0}f_n$ ne converge pas normalement.
Cependant, pour tout $x\in[0\,;1[$:
$$|\mathrm{R_N}(x)|=\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty}a_nx^n(1-x)\leq a_{\mathrm{N}+1}x^{\mathrm{N}+1}(1-x)\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\leq a_{\mathrm{N}+1}x^{\mathrm{N}+1}\leq a_{\mathrm{N}+1}$$

et pour $x = 1$, $R_N(x) = 0$,

donc $\|R_N\|_\infty \leq a_{N+1} \leq \dfrac{1}{\ln(N+1)}$, donc $\|R_N\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

Ainsi, $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[0\,;\,1]$.

3. L'équivalent $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{e} \times \dfrac{a_n}{n}$ justifie, par le critère des équivalents pour les termes généraux positifs que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement si, et seulement si, $\sum_{n\geq 0} a_n/n$ converge.

4. • Le raisonnement de la fin de 2. montre que
$$\forall N \geq 0, \quad \|R_N\|_\infty \leq a_{N+1},$$
donc $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément si (a_n) converge vers 0.

• Réciproquement, supposons que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément, donc que $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Comme (a_n) est décroissante minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \in [0\,;\,+\infty[$, et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq \ell$.
Soit $N \in \mathbb{N}$.
On a : $\forall x \in [0\,;\,1[, R_N(x) \geq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \ell x^n(1-x) \geq \ell x^{N+1}$, donc $\|R_N\|_\infty \geq \ell x^{N+1}$.
En faisant tendre x vers 1 : $\|R_N\|_\infty \geq \ell$.
Ainsi : $\forall N \in \mathbb{N}, \quad \|R_N\|_\infty \geq \ell$.
Comme $\|R_N\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, on en déduit $\ell \leq 0$, donc $\ell = 0$...

Exercice 3 *Une intégrale somme de série*

Pour tout u de $]0\,;\,1]$, on pose : $\quad f(u) = \dfrac{\exp(u)-1}{u}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore $f : [0\,;\,1] \to \mathbb{R}$ le prolongement obtenu.
2. a) Exprimer, pour tout u de $[0\,;\,1]$, $f(u)$ sous forme d'une somme d'une série de fonctions.
b) Montrer finalement que $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{e^u-1}{u}\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\times n!}$.

Solution (**Ex.3 –** *Une intégrale somme de série*)

1. $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$ donc $f(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 1 \in \mathbb{R}$.
2. a) $\forall u \in [0\,;\,1], f(u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{n!}$.
b) • Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : u \mapsto u^{n-1}/n!$ est continue sur $[0\,;\,1]$.
• $\sum_{n\geq 1} f_n \xrightarrow{\mathcal{CS}} f$ sur $[0\,;\,1]$.
• f est continue sur $[0\,;\,1]$.
• $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\int_0^1 |f_n(u)|\mathrm{d}u = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\times n!}$ converge car $\forall n \geq 1, 0 \leq \dfrac{1}{n.n!} \leq \dfrac{1}{n!}$ et la série exponentielle $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n!}$ converge.
Par le théorème d'interversion,
$$\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n(u)\mathrm{d}u, \text{ i.e.}$$
$$\int_0^{+\infty}\Big(\exp(e^{-x})-1\Big)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\times n!}$$

Exercice 4 *Harmoniquement*

On pose : $\qquad \forall \in\,]-1\,;\,+\infty[, \quad S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

1. Montrer que S est définie, continue et croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.
2. Calculer $S(x+1) - S(x)$ et en déduire un équivalent de $S(x)$ en -1.
3. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
b) En déduire un équivalent de $S(x)$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

Solution (**Ex.4 –** *Harmoniquement*)

1. Montrer que S est définie et continue sur $]-1\,;\,+\infty[$.
Surtout ne pas séparer la série en deux séries divergentes ! ! !
• Je note : $f_n(x) \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$ pour $n \geq 1$, $x > -1$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in\,]-1\,;\,+\infty[, \quad |f_n(x)| \overset{\text{déf.}}{=} \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\right| = \dfrac{|x|}{n(n+x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{|x|}{n^2}$.

Par convergence de la série de Riemann de paramètre 2, $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $]-1\,;+\infty[$.

$$\text{S est définie sur }]-1\,;+\infty[.$$

• Soit a et b tels que $-1<a<0$ et $1<b$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$\|f_n\|_{\infty,[a\,;\,b]} = \sup_{x\in[a\,;\,b]} \frac{|x|}{n(n+x)} \leq \frac{b}{n(n+a)}$, or $\frac{b}{n(n+a)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b}{n^2}$ donc $\sum_{n\geq +}\frac{b}{n(n+a)}$ converge équivalence, et par comparaison $\sum_{n\geq 1}\|f_n\|_{\infty,[a\,;\,b]}$ converge.

La convergence est normale, donc uniforme, sur $[a\,;\,b]$. Comme chaque f_n est continue sur $[a\,;\,b]$, S est continue sur $[a\,;\,b]$. Et comme ceci est valable pour tout a et b tels que $-1<a<0<1<b$, S est continue sur $]-1\,;+\infty[$.

• Chaque f_n est croissante ($f_n'(x)=\frac{1}{(n+x)^2}>0$...), donc par sommation S est croissante.

2. • Soit $x>-1$. Je note $S_N(x)=\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$.

$$S_N(x+1)-S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1+x}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+x}=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{N+1+x}.$$

Passons à la limite lorsque $N\longrightarrow+\infty$: $S(x+1)-S(x)=\frac{1}{1+x}$.

• Dans $S(x)=S(x+1)-\frac{1}{1+x}$, faisons tendre x vers -1^+ : $\lim_{x\to-1^+} S(x+1)=S(0)$ par continuité, or $S(0)=0$. Donc $S(x+1)=o\left(\frac{1}{x+1}\right)$, donc $S(x+1)-\frac{1}{1+x}\underset{x\to-1}{\sim}\frac{-1}{x+1}$.

Ainsi : $\quad S(x)\underset{x\to-1}{\sim}\frac{-1}{x+1}$.

3. a) $S(0)=0$ et : $\forall n\in\mathbb{N}, S(n+1)-S(n)=\frac{1}{n+1}$ donc $S(n+1)=S(n)+\frac{1}{n+1}$... d'où

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad S(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

b) *Culture nécessaire :* $S(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$.

Par croissance de S : $S(\lfloor x\rfloor)\leq S(x)\leq S(\lfloor x\rfloor+1)$

donc $S(\lfloor x\rfloor)\leq S(x)\leq S(\lfloor x\rfloor)+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}$

donc $\frac{S(\lfloor x\rfloor)}{\ln x}\leq\frac{S(x)}{\ln x}\leq\frac{S(\lfloor x\rfloor)}{\ln x}+\frac{1}{(\ln x)(\lfloor x\rfloor+1)}$.

• $\frac{1}{(\ln x)(\lfloor x\rfloor+1)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ sans souci,

• $\frac{S(\lfloor x\rfloor)}{\ln x}=\frac{S(\lfloor x\rfloor)}{\ln\lfloor x\rfloor}\times\frac{\ln\lfloor x\rfloor}{\ln x}$ or $\frac{S(\lfloor x\rfloor)}{\ln\lfloor x\rfloor}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$ (culture !)

• $\ln\lfloor x\rfloor=\ln\big(x+(\lfloor x\rfloor-x)\big)=\ln\left(x(1+\frac{\lfloor x\rfloor-x}{x})\right)$

$\ln\lfloor x\rfloor=\ln x+\ln\left(1+\frac{\lfloor x\rfloor-x}{x}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln x$ car $\ln\left(1+\frac{\lfloor x\rfloor-x}{x}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ car $\frac{\lfloor x\rfloor-x}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

Ouf ! On a bien : $\frac{S(\lfloor x\rfloor)}{\ln x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$, donc par encadrement $\frac{S(x)}{\ln x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$,

$$S(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln(x).$$

Exercice 5 *Étude d'une fonction définie par une somme*

Soit, sous réserve d'existence, $\quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f ? Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}$.
2. Montrer que f est décroissante.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. a) Montrer que : $\forall x\in\mathcal{D},\quad \int_0^{+\infty}e^{-x\sqrt{t}}dt\leq f(x)\leq 1+\int_0^{+\infty}e^{-x\sqrt{t}}dt$.

   b) En posant $u=\sqrt{t}$ dans l'intégrale précédente, déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

Solution (**Ex.5 –** *Étude d'une fonction définie par une somme*)

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f ? Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}$.

   • Si $x<0$, $e^{-x\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ et la série diverge grossièrement. De même si $x=0$ car alors $e^{-x\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1\neq 0$.

   Si $x>0$, alors $\lim_{n\to+\infty}n^2e^{-x\sqrt{n}}=\lim_{m\to+\infty}\frac{m^4}{(e^x)^m}=0$ par croissance comparée (car $e^x>1$).

   Donc $e^{-x\sqrt{n}}=o\left(1/n^2\right)$ et la série converge par comparaison à la série de Riemann.

$$\mathcal{D}=]0\,;+\infty[.$$

   • Soit $a\in]0\,;+\infty[$.

   $\forall x\in[a\,;+\infty[, \left|e^{-x\sqrt{n}}\right|\leq e^{-a\sqrt{n}}$ or par ce qui précède $f(a)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-a\sqrt{n}}$ converge. Donc

la série converge normalement donc uniformément sur $[a\,;+\infty[$. Comme chaque f_n est continue sur $[a\,;+\infty[$, f est continue sur $[a\,;+\infty[$.
Ceci étant valable pour tout $a\in]0\,;+\infty[$, f est continue sur $\mathcal{D}$.

2. Chaque f_n est décroissante sur $\mathcal{D}$, donc par sommation f est décroissante sur $\mathcal{D}$:
si $x<y$, $f(x)-f(y)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{(f_n(x)-f_n(y))}_{>0}>0$.

3. La convergence de $\displaystyle\sum_n f_n$ est normale donc uniforme sur $[1\,;+\infty[$, et
$\forall n\geqslant 1, f_n(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ tandis que $f_0(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$.
Par le théorème de la double limite,
$f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}0=1$.

4. a) Soit $x\in\mathcal{D}$.
Par décroissance de $t\mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ sur $[0\,;+\infty[$,
$$\int_k^{k+1}e^{-x\sqrt{t}}\,dt\le e^{-x\sqrt{k}}\le\int_{k-1}^{k}e^{-x\sqrt{t}}\,dt.$$
En sommant de $k=0$ à N la minoration et en passant à $N\longrightarrow+\infty$:
$$\int_0^{+\infty}e^{-x\sqrt{t}}\,dt\le f(x).$$
En sommant de $k=1$ à N la majoration et en passant à $N\longrightarrow+\infty$:
$$f(x)-e^0\le\int_0^{+\infty}e^{-x\sqrt{t}}\,dt.$$
Ainsi : $\forall x\in\mathcal{D},\quad \displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x\sqrt{t}}\,dt\le f(x)\le 1+\int_0^{+\infty}e^{-x\sqrt{t}}\,dt.$

b) Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x\sqrt{t}}\,dt\overset{u=\sqrt{t}}{=}\int_0^{+\infty}2ue^{-xu}\,du\overset{\text{IPP}}{=}\left[2u\frac{e^{-xu}}{x}\right]_0^{+\infty}-\frac{2}{x}\int_0^{+\infty}e^{-xu}\,du=\frac{2}{x^2}$.
On déduit alors de a)
$$1\le\frac{x^2}{2}f(x)\le\frac{x^2}{2}+1,$$
donc par encadrement $\dfrac{x^2}{2}f(x)\xrightarrow[x\to0]{}1$ donc
$$f(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{2}{x^2}.$$

Exercice 6 *Non dérivable en 0*

On pose, pour tout x de $[0\,;+\infty[$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad f_n(x)=\dfrac{x}{n(1+n^2x^2)}$.

1. Montrer que $S:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ est définie sur $[0\,;+\infty[$.
2. La convergence de la série des f_n est-elle uniforme ? normale ?
3. Justifier que S est continue $[0\,;+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.
4. a) Montrer que, pour tout $x>0$, $\quad\dfrac{S(x)-S(0)}{x}\ge\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{du}{u(1+u^2)}$.
   b) En déduire que S n'est pas dérivable en 0.

Solution (**Ex.6 –** *Non dérivable en 0*)

On pose, pour tout x de $[0\,;+\infty[$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad f_n(x)=\dfrac{x}{n(1+n^2x^2)}$.

1. Montrer que $S:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ est définie sur $[0\,;+\infty[$.
$\forall n\ge1, f_n(0)=0$ donc $S(0)$ existe.
$\forall x\neq0, |f_n(x)|\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^3|x|}$ assure la convergence simple de $S(x)$ par équivalence à la série de Riemann de paramètre 3.

2. De $\forall x\in\mathbb{R},\quad 0\le(1-n|x|)^2=1+n^2x^2-2n|x|$ on tire $2n|x|\le1+n^2x^2$ puis $|f_n(x)|\le\dfrac{1}{2n^2}$.
D'où $\|f_n\|_\infty\le\dfrac{1}{2n^2}$, ce qui assure la convergence normale, donc uniforme de $\displaystyle\sum_{n\ge1}f_n$ sur $\mathbb{R}$.

3. • La convergence uniforme et la continuité de chaque f_n assure la continuité de S sur $\mathbb{R}$.
• Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et :
$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad f_n'(x)=\dfrac{1-n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2}$
Soit $a>0$ et x tel que $|x|\ge a$. Alors
$|f_n'(x)|\le\dfrac{1+n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2}\le\dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}\le\dfrac{1}{n(1+n^2a^2)}\le\dfrac{1}{n^3a^2}$
Donc $\|f_n\|_{\infty,]-\infty\,;\,a]\cup[a\,;+\infty[}\le\dfrac{1}{n^3a^2}$. Ceci assure la convergence normale donc uniforme sur tout $]-\infty\,;\,a]\cup[a\,;+\infty[$ où $a>0$. Donc que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

4. a) Soit $x>0$.
$$\frac{S(x)-S(0)}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$
Par comparaison à une intégrale :

$$\frac{S(x)-S(0)}{x} \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2x^2)}\mathrm{d}t$$

Par le changement $u = tx$!

$$\frac{S(x)-S(0)}{x} \geq \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u^2)}.$$

b) En déduire que S n'est pas dérivable en 0.

Comme $\dfrac{1}{u(1+u^2)} \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u}$, par équivalence de fonctions positives avec $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ non intégrable sur $]0\,;\,1]$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$: S n'est pas dérivable en 0.

Exercice 7 *Une permutation série/intégrale*

1. Justifier l'existence et calculer la valeur de : $\quad \mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

   On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\qquad f_n :]0\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto 2x\exp\big(-(2n+1)x\big)$.

2. **a)** Montrer que la série $\sum_n f_n$ converge simplement vers une fonction f que l'on exprimera à l'aide de la fonction sh.

   b) Montrer que : $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{sh}(t)}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$.

3. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que : $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{sh}(t)}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}$.

Solution (**Ex.7 –** *Une permutation série/intégrale*)

1. Une IPP permet de montrer l'existence et de donner la valeur : I = 1.

2. **a)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-(2n+1)x) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)^n = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-2x}}$ comme somme de série géométrique.

   $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-(2n+1)x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{2\mathrm{sh}(x)}$, donc $\sum f_n$ converge avec :

$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n(x)} = \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}.$$

   b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-(2n+1)t}\mathrm{d}t \overset{x=(2n+1)t}{=} \frac{2}{(2n+1)^2}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \frac{2}{(2n+1)^2}$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ et la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f_{n()}\right|\mathrm{d}t$ converge.

On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme puisqu'il s'agit d'une série de fonctions *c.p.m.* intégrables convergeant simplement vers une fonction *c.p.m.* :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{sh}(t)}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}.$$

Comme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\times\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{sh}(t)}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}.$$