

Exercice 1 Norme et morphisme injectif

Soit (F, N) un espace vectoriel normé. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que u est injective.

Montrer que la fonction $N \circ u : x \mapsto N(u(x))$ est une norme sur E .

Solution (Ex.1 – Norme et morphisme injectif)

Vérifions les 4 axiomes d'une norme.

Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Comme N est positive, $N \circ u$ est positive.

(ii) Si $N \circ u(x) = 0$ alors $u(x) = 0$ car N est une norme, donc $x = 0$ car u est injective.

(iii) $N \circ u(\lambda x) = N(\lambda u(x)) = |\lambda| N \circ u(x)$ car u est linéaire et N est une norme.

(iv) $N \circ u(x+y) = N(u(x)+u(y)) \leq N \circ u(x) + N \circ u(y)$ car u est linéaire et N est une norme.

Exercice 2 Une norme sur \mathbb{R}^2

Pour tout $x = (x_1, x_2)$ de \mathbb{R}^2 , on pose $M(x) = \max(|x_1|, |x_1 + x_2|)$.

1. Montrer que M est une norme sur \mathbb{R}^2 .

2. Dessiner la boule unité fermée de M .

3. Trouver des constantes λ et μ strictement positives telles que $\forall x \in \mathbb{R}^2, M(x) \leq \lambda \|x\|_2$ et $\|x\|_2 \leq \mu M(x)$,

les constantes λ et μ étant aussi petites que possible.

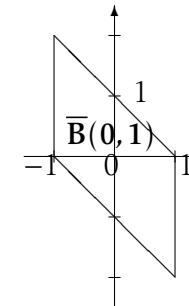
Solution (Ex.2 – Une norme sur \mathbb{R}^2)

1. On vérifie sans problème les 4 axiomes d'une norme.

2. $|x_1| \leq 1 \iff -1 \leq x_1 \leq 1$,

$$|x_1 + x_2| \leq 1 \iff -1 \leq x_1 + x_2 \leq 1 \iff -1 - x_1 \leq x_2 \leq 1 - x_1$$

La boule unité fermée est le parallélogramme suivant :



3. $\overline{B}(0, 1)$ est incluse dans le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{5}$ et contient le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $1/\sqrt{2}$.

• Donc $M(x) = 1 \Rightarrow \|x\|_2 \leq \sqrt{5}$.

Par homogénéité, pour tout vecteur x non nul,

$$\|x\|_2 = \left\| M(x) \left(\frac{1}{M(x)} x \right) \right\|_2 = M(x) \left\| \frac{1}{M(x)} x \right\|_2 \leq M(x) \sqrt{5}$$

Comme $\|(-1, 2)\|_2 = \sqrt{5} = \sqrt{5}M((-1, 2))$ puisque $M((-1, 2)) = 1$, $\mu = \sqrt{5}$.

• De même, $\|x\|_2 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow M(x) \leq 1$ donc $\|x\|_2 = 1 \Rightarrow M(x) \leq \sqrt{2}$, donne par un raisonnement analogue, pour tout $x \neq 0$, $M(x) \leq \sqrt{2} \|x\|_2$, avec égalité pour $x = (1/2, 1/2)$, donc $\lambda = \sqrt{2}$.

Exercice 3 Normes et convergence dans $\mathbb{R}[X]$

Pour tout polynôme réel P , écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on note

$$\|P\| = \sup_{x \in [0; 1/2]} |P(x)| \text{ et } N(P) = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

1. Prouver que $\|\cdot\|$ et N sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|$ et vers 1 pour la norme N .
3. Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme X .

Solution (Ex.3 – Normes et convergence dans $\mathbb{R}[X]$)

1. • $\|\cdot\|$ est la norme infinie sur $[0; 1/2]$. Pour la séparation, on notera que $\|P\| = 0$ entraîne que P possède une infinité de racines donc est le polynôme nul.
- Pour N , on notera qu'il n'y a aucun problème de convergence des séries puisque pour tout polynôme P de coefficients (a_k) , la suite (a_k) est nulle à partir d'un certain rang. Pour la séparation, on notera que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k} = 0$ entraîne $\forall k \geq 1, a_k = 0$, et qu'alors $\left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| = 0$ entraîne de plus $a_0 = 0$.
2. • $\|X^n\| = \frac{1}{2^n}$ donc $\|X^n - 0\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$: $X^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} 0$
- $N(X^n - 1) = 0 + \frac{1}{n}$ donc $N(X^n - 1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$: $X^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N} 1$

3. Je propose $M : P \mapsto |a_0| + \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}$... à vérifier!

Exercice 4 Trois normes sur un espace de dimension infinie

Dans $E = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$, on considère :

$$N : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \quad \text{et}$$

$$\nu : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto |f(1)| + \int_0^1 |f'(t)| dt.$$

1. Montrer que N et ν sont des normes sur E .
2. a) Pour $f \in E$, quelle relation y a-t-il entre $f(0)$, $f(1)$ et $\int_0^1 f'(t) dt$?
- b) Montrer que : $\forall f \in E, \nu(f) \leq 2N(f)$.
- c) Établir une inégalité majorant $N(f)$ à l'aide de $\nu(f)$.
3. Soit $M : f \mapsto |f(0)| + \sup_{[0; 1]} |f'| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$. On admet que M est une norme sur E .

- a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$. Calculer $N(f_n)$ et $M(f_n)$.

- b) M et N sont-elles des normes équivalentes ?

Solution (Ex.4 – Trois normes sur un espace de dimension infinie)

1. • N et ν sont positives et homogènes par positivité et homogénéité de la valeur absolue, et positivité de l'intégrale.

• $N(f) = 0$ (resp. $\nu(f) = 0$) entraîne $\begin{cases} |f(0)| = 0 \text{ (resp. } f(1) = 0) \\ \int_0^1 |f'(t)| dt = 0 \end{cases}$ Or

$|f'|$ est continue et positive, d'intégrale nulle sur $[0; 1]$, donc f' est nulle sur $[0; 1]$, donc f est constante sur $[0; 1]$. Comme $f(0) = 0$ (resp. $f(1) = 0$), f est la fonction nulle de E . N et ν vérifient la séparation.

2. a) $\int_0^1 f'(t) dt = [f(t)]_0^1 = f(1) - f(0)$

b) Soit $f \in E$. De 2.a) je tire : $f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(t) dt$ puis $|f(1)| \leq |f(1)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \leq N(f)$

$$\nu(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \leq N(f) + N(f) \leq 2N(f)$$

c) On raisonne de même avec : $|f(0)| \leq |f(1)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \leq \nu(f)$ issue de 2.a). On obtient : $N(f) \leq 2\nu(f)$.

Commentaire : $\forall f \in E, \frac{1}{2}N(f) \leq \nu(f) \leq 2N(f)$, on dit que N et ν sont équivalentes.

Exercice 5 Limites de puissances d'une matrice

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B$. Montrer



que $B^2 = B$.

Solution (Ex.5 – Limites de puissances d'une matrice)

1. $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B$ entraîne (suite extraite) $A^{2k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B$. Mais $A^{2k} = (A^k)^2 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B^2$ par continuité du produit matriciel. Par unicité de la limite : $B^2 = B$.
2. Avec $A = B$, on a par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = B$, donc $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B$.
3. Une matrice B est limite de la suite des puissances d'une matrice si, et seulement si, $B^2 = B$.

Exercice 6 Exponentielle de matrices particulières

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et, pour tout k de \mathbb{N} , $S_k = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} M^j$. On appelle *exponentielle de M* , si elle existe, la limite de la suite $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$, notée e^M .

1. Dans les cas suivants, montrer que e^M existe et la calculer :

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \text{b) } M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On suppose M diagonalisable, et on appelle $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale semblable à M . Montrer que e^D et e^M existent, et donner une relation entre elles.

3. Calculer e^M pour $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution (Ex.6 – Exponentielle de matrices particulières)

1. Dans les cas suivants, montrer que e^M existe et la calculer :

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}, M^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a^2b + abc + bc^2 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix},$$

et par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \begin{pmatrix} a^k & b \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} c^i \\ 0 & b^k \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a^k & b \frac{a^k - c^k}{a - c} \\ 0 & b^k \end{pmatrix} & \text{si } a \neq c, \\ \begin{pmatrix} a^k & bka^{k-1} \\ 0 & b^k \end{pmatrix} & \text{si } a = c. \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^k \frac{a^j}{j!} \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{} e^a, \quad \sum_{j=0}^k \frac{b^j}{j!} \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{} e^b, \text{ donc :}$$

$$\bullet \text{ pour } a \neq c, S_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \begin{pmatrix} e^a & \frac{b(e^a - e^c)}{a - c} \\ 0 & e^c \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf.}}{=} e^M.$$

$$\bullet \text{ pour } a = c, S_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \begin{pmatrix} e^a & be^a \\ 0 & e^c \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf.}}{=} e^M.$$

$$\text{b) } M^2 = a^2 I_2 \text{ donc, en posant } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M^{2k} = a^{2k} I_2 \text{ et } M^{2k+1} = a^{2k+1} N.$$

$$S_{2j} = \left(\sum_{i=0}^j \frac{a^{2i}}{(2i)!} \right) I_2 + \left(\sum_{i=0}^{j-1} \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!} \right) N$$

$$\text{Or : } \sum_{i=0}^j \frac{a^{2i}}{(2i)!} \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{} \frac{e^a + e^{-a}}{2}, \text{ et : } \sum_{i=0}^{j-1} \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!} \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{} \frac{e^a - e^{-a}}{2}$$

$$\text{donc } S_{2j} \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^a + e^{-a} & e^a - e^{-a} \\ e^a - e^{-a} & e^a + e^{-a} \end{pmatrix}$$

Comme $S_{2j+1} = \left(\sum_{i=0}^j \frac{a^{2i}}{(2i)!} \right) I_2 + \left(\sum_{i=0}^j \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!} \right) N$,

donc $S_{2j+1} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^a + e^{-a} & e^a - e^{-a} \\ e^a - e^{-a} & e^a + e^{-a} \end{pmatrix}$

Finalement : $S_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^a + e^{-a} & e^a - e^{-a} \\ e^a - e^{-a} & e^a + e^{-a} \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf.}}{=} e^M$.

c) $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\forall k \geq 3, M^k = 0$.

La série n'a que trois termes non nuls, donc converge : $e^M = \begin{pmatrix} 1 & a & b + \frac{ac}{2} \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On suppose M diagonalisable.

Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que

$$D = P^{-1}MP.$$

En notant $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a : $\forall j \in \mathbb{N}, D^j = \text{diag}(\lambda_1^j, \dots, \lambda_n^j)$.

Notons pour tout k de \mathbb{N} , $T_k = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} D^j$.

Donc $T_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n)) \stackrel{\text{déf.}}{=} e^D$.

Comme : $\forall j \in \mathbb{N}, M^j = PD^jP^{-1}$, on a : $\forall k \in \mathbb{N}, S_k = PT_kP^{-1}$.

Donc : $S_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} Pe^D P^{-1} \stackrel{\text{déf.}}{=} e^M$.

Ainsi e^D et e^M existent, et $Pe^D P^{-1} = e^M$.

3. On a par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = 2^{n-1}M$.

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k = I_2 + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} 2^{k-1} \right) M = I_2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} 2^k \right) M$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I_2 + \frac{1}{2}(e^2 - 1)M \text{ d'où } \exp(M) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^2 & 1 - e^2 \\ 1 - e^2 & 1 + e^2 \end{pmatrix}$$