

**Exercice 1** Norme et morphisme injectif

Soit  $(F, N)$  un espace vectoriel normé. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On suppose que  $u$  est injective.

Montrer que la fonction  $N \circ u : x \mapsto N(u(x))$  est une norme sur  $E$ .

**Solution (Ex.1 – Norme et morphisme injectif)**

Vérifions les 4 axiomes d'une norme.

Soit  $(x, y) \in E^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (i) Comme  $N$  est positive,  $N \circ u$  est positive.
- (ii) Si  $N \circ u(x) = 0$  alors  $u(x) = 0$  car  $N$  est une norme, donc  $x = 0$  car  $u$  est injective.
- (iii)  $N \circ u(\lambda x) = N(\lambda u(x)) = |\lambda| N \circ u(x)$  car  $u$  est linéaire et  $N$  est une norme.
- (iv)  $N \circ u(x + y) = N(u(x) + u(y)) \leq N \circ u(x) + N \circ u(y)$  car  $u$  est linéaire et  $N$  est une norme.

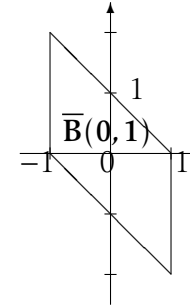
**Exercice 2** Une norme sur  $\mathbb{R}^2$ 

Pour tout  $x = (x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , on pose  $M(x) = \max(|x_1|, |x_1 + x_2|)$ .

- Montrer que  $M$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Dessiner la boule unité fermée de  $M$ .
- Trouver des constantes  $\lambda$  et  $\mu$  strictement positives telles que  $\forall x \in \mathbb{R}^2, M(x) \leq \lambda \|x\|_2$  et  $\|x\|_2 \leq \mu M(x)$ , les constantes  $\lambda$  et  $\mu$  étant aussi petites que possible.

**Solution (Ex.2 – Une norme sur  $\mathbb{R}^2$ )**

- On vérifie sans problème les 4 axiomes d'une norme.
- $|x_1| \leq 1 \iff -1 \leq x_1 \leq 1$ ,  
 $|x_1 + x_2| \leq 1 \iff -1 \leq x_1 + x_2 \leq 1 \iff -1 - x_1 \leq x_2 \leq 1 - x_1$   
 La boule unité fermée est le parallélogramme suivant :



- $\bar{B}(0,1)$  est incluse dans le cercle de centre  $(0,0)$  et de rayon  $\sqrt{5}$  et contient le cercle de centre  $(0,0)$  et de rayon  $1/\sqrt{2}$ .  
 • Donc  $M(x) = 1 \Rightarrow \|x\|_2 \leq \sqrt{5}$ .  
 Par homogénéité, pour tout vecteur  $x$  non nul,  

$$\|x\|_2 = \left\| M(x) \left( \frac{1}{M(x)} x \right) \right\|_2 = M(x) \left\| \frac{1}{M(x)} x \right\|_2 \leq M(x) \sqrt{5}$$
  
 Comme  $\|(-1,2)\|_2 = \sqrt{5} = \sqrt{5} M((-1,2))$  puisque  $M((-1,2)) = 1$ ,  $\mu = \sqrt{5}$ .  
 • De même,  $\|x\|_2 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow M(x) \leq 1$  donc  $\|x\|_2 = 1 \Rightarrow M(x) \leq \sqrt{2}$ , donne par un raisonnement analogue, pour tout  $x \neq 0$ ,  $M(x) \leq \sqrt{2} \|x\|_2$ , avec égalité pour  $x = (1/2, 1/2)$ , donc  $\lambda = \sqrt{2}$ .

**Exercice 3** Normes et convergence dans  $\mathbb{R}[X]$ 

Pour tout polynôme réel  $P$ , écrit sous la forme  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X_k$ , on note

$$\|P\| = \sup_{x \in [0; 1/2]} |P(x)| \text{ et } N(P) = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

- Prouver que  $\|\cdot\|$  et  $N$  sont des normes sur  $\mathbb{R}[X]$ .
- Montrer que la suite  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 pour la norme  $\|\cdot\|$  et vers 1 pour la norme  $N$ .
- Construire une norme sur  $\mathbb{R}[X]$  pour laquelle la suite  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le polynôme  $X$ .

**Solution (Ex.3 – Normes et convergence dans  $\mathbb{R}[X]$ )**

- $\|\cdot\|$  est la norme infinie sur  $[0; 1/2]$ . Pour la séparation, on notera que  $\|P\| = 0$  entraîne que  $P$  possède une infinité de racines donc est le polynôme nul.  
 • Pour  $N$ , on notera qu'il n'y a aucun problème de convergence des séries puisque pour tout polynôme  $P$  de coefficients  $(a_k)$ , la suite  $(a_k)$  est nulle à partir d'un certain rang. Pour la séparation, on notera que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k} = 0$  entraîne  $\forall k \geq 1, a_k = 0$ , et qu'alors  $\left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| = 0$  entraîne de plus  $a_0 = 0$ .
- $\|X^n\| = \frac{1}{2^n}$  donc  $\|X^n - 0\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 : X^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} 0$   
 •  $N(X^n - 1) = 0 + \frac{1}{n}$  donc  $N(X^n - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 : X^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N} 1$
- Je propose  $M : P \mapsto |a_0| + \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k} \dots$  à vérifier !

**Exercice 4** Trois normes sur un espace de dimension infinie

Dans  $E = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ , on considère :

$$N : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \quad \text{et}$$

$$\nu : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto |f(1)| + \int_0^1 |f'(t)| dt.$$

- Montrer que  $N$  et  $\nu$  sont des normes sur  $E$ .
- a) Pour  $f \in E$ , quelle relation y a-t-il entre  $f(0)$ ,  $f(1)$  et  $\int_0^1 f'(t) dt$  ?  
 b) Montre que :  $\forall f \in E, \nu(f) \leq 2N(f)$ .  
 c) Établir une inégalité majorant  $N(f)$  à l'aide de  $\nu(f)$ .
- Soit  $M : f \mapsto |f(0)| + \sup_{[0; 1]} |f'| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ . On admet que  $M$  est une norme sur  $E$ .

a) On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ .  
 Calculer  $N(f_n)$  et  $M(f_n)$ .

b)  $M$  et  $N$  sont-elles des normes équivalentes ?

**Solution (Ex.4 – Trois normes sur un espace de dimension infinie)**

- $N$  et  $\nu$  sont positives et homogènes par positivité et homogénéité de la valeur absolue, et positivité de l'intégrale.

$$\bullet N(f) = 0 \text{ (resp. } \nu(f) = 0 \text{)} \text{ entraîne } \begin{cases} |f(0)| = 0 \text{ (resp. } f(1) = 0) \\ \int_0^1 |f'(t)| dt = 0 \end{cases} \quad \text{Or}$$

$|f'|$  est continue et positive, d'intégrale nulle sur  $[0; 1]$ , donc  $f'$  est nulle sur  $[0; 1]$ , donc  $f$  est constante sur  $[0; 1]$ . Comme  $f(0) = 0$  (resp.  $f(1) = 0$ ),  $f$  est la fonction nulle de  $E$ .  $N$  et  $\nu$  vérifient la séparation.

$$2. a) \int_0^1 f'(t) dt = [f(t)]_0^1 = f(1) - f(0)$$

b) Soit  $f \in E$ . De 2.a) je tire :  $f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(t) dt$  puis  $|f(1)| \leq$

$$|f(1)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \leq N(f)$$

$$\nu(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \leq N(f) + N(f) \leq 2N(f)$$

c) On raisonne de même avec :  $|f(0)| \leq |f(1)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \leq \nu(f)$  issue de 2.a). On obtient :  $N(f) \leq 2\nu(f)$ .

Commentaire :  $\forall f \in E, \frac{1}{2}N(f) \leq \nu(f) \leq 2N(f)$ , on dit que  $N$  et  $\nu$  sont équivalentes.

**Exercice 5** Limites de puissances d'une matrice

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que :  $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B$ . Montrer

que  $B^2 = B$ .

**Solution (Ex.5 – Limites de puissances d'une matrice)**

1.  $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B$  entraîne (suite extraite)  $A^{2k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B$ . Mais  $A^{2k} = (A^k)^2 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B^2$  par continuité du produit matriciel. Par unicité de la limite :  $B^2 = B$ .
2. Avec  $A = B$ , on a par récurrence :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^k = B$ , donc  $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B$ .
3. Une matrice  $B$  est limite de la suite des puissances d'une matrice si, et seulement si,  $B^2 = B$ .

**Exercice 6** Exponentielle de matrices particulières

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ ,  $S_k = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} M^j$ . On appelle *exponentielle de  $M$* , si elle existe, la limite de la suite  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , notée  $e^M$ .

1. Dans les cas suivants, montrer que  $e^M$  existe et la calculer :

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \text{b) } M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On suppose  $M$  diagonalisable, et on appelle  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice diagonale semblable à  $M$ . Montrer que  $e^D$  et  $e^M$  existent, et donner une relation entre elles.
3. Calculer  $e^M$  pour  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Solution (Ex.6 – Exponentielle de matrices particulières)**

1. Dans les cas suivants, montrer que  $e^M$  existe et la calculer :

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}, M^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a^2b + abc + bc^2 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix},$$

et par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \begin{pmatrix} a^k & b \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} c^i \\ 0 & b^k \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a^k & b \frac{a^k - c^k}{a - c} \\ 0 & b^k \end{pmatrix} & \text{si } a \neq c, \\ \begin{pmatrix} a^k & b k a^{k-1} \\ 0 & b^k \end{pmatrix} & \text{si } a = c. \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^k \frac{a^j}{j!} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} e^a, \quad \sum_{j=0}^k \frac{b^j}{j!} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} e^b, \text{ donc :}$$

- pour  $a \neq c$ ,  $S_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \begin{pmatrix} e^a & \frac{b(e^a - e^c)}{a - c} \\ 0 & e^c \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf.}}{=} e^M.$
- pour  $a = c$ ,  $S_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \begin{pmatrix} e^a & b e^a \\ 0 & e^c \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf.}}{=} e^M.$

$$\text{b) } M^2 = a^2 I_2 \text{ donc, en posant } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M^{2k} = a^{2k} I_2 \text{ et } M^{2k+1} = a^{2k+1} N.$$

$$S_{2j} = \left( \sum_{i=0}^j \frac{a^{2i}}{(2i)!} \right) I_2 + \left( \sum_{i=0}^{j-1} \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!} \right) N$$

$$\text{Or : } \sum_{i=0}^j \frac{a^{2i}}{(2i)!} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \frac{e^a + e^{-a}}{2}, \text{ et : } \sum_{i=0}^{j-1} \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \frac{e^a - e^{-a}}{2}$$

$$\text{donc } S_{2j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^a + e^{-a} & e^a - e^{-a} \\ e^a - e^{-a} & e^a + e^{-a} \end{pmatrix}$$

$$\text{Comme } S_{2j+1} = \left( \sum_{i=0}^j \frac{a^{2i}}{(2i)!} \right) I_2 + \left( \sum_{i=0}^j \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!} \right) N,$$

$$\text{donc } S_{2j+1} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^a + e^{-a} & e^a - e^{-a} \\ e^a - e^{-a} & e^a + e^{-a} \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalement : } S_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^a + e^{-a} & e^a - e^{-a} \\ e^a - e^{-a} & e^a + e^{-a} \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf.}}{=} e^M.$$

$$\text{c) } M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \forall k \geq 3, M^k = 0.$$

La série n'a que trois termes non nuls, donc converge :  $e^M =$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b + \frac{ac}{2} \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On suppose  $M$  diagonalisable.

Soit  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonale telles que

$$D = P^{-1}MP.$$

En notant  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , on a :  $\forall j \in \mathbb{N}, D^j = \text{diag}(\lambda_1^j, \dots, \lambda_n^j)$ .

$$\text{Notons pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}, T_k = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} D^j.$$

$$\text{Donc } T_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n)) \stackrel{\text{déf.}}{=} e^D.$$

$$\text{Comme : } \forall j \in \mathbb{N}, M^j = PD^jP^{-1}, \text{ on a : } \forall k \in \mathbb{N}, S_k = PT_kP^{-1}.$$

$$\text{Donc : } S_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} Pe^DP^{-1} \stackrel{\text{déf.}}{=} e^M.$$

Ainsi  $e^D$  et  $e^M$  existent, et  $Pe^DP^{-1} = e^M$ .

3. On a par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = 2^{n-1}M$ .

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k = I_2 + \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} 2^{k-1} \right) M = I_2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} 2^k \right) M$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I_2 + \frac{1}{2} (e^2 - 1) M \text{ d'où } \exp(M) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^2 & 1 - e^2 \\ 1 - e^2 & 1 + e^2 \end{pmatrix}$$