Exercice 1 *L'épistolaire distrait*

Un correspondant distrait écrit successivement n lettres distinctes, destinées à n personnes distinctes. Il les place dans n enveloppes distinctes indiscernables, qu'il cachette avant d'y avoir apposé les adresses des destinataires. Il finit par écrire les adresses au hasard.

1. a) Proposer un univers Ω le plus simple possible permettant de modéliser l'expérience.

b) Donner une description ensembliste de l'événement « La première lettre écrite arrive à son destinataire » puis de l'événement « Toutes les lettres arrivent à leur destinataire ».

2. Pour tout i de $[\![1\,;\ n]\!]$, on note L_i l'événement « la i-ème lettre écrite arrive à son destinataire ».

a) Quelle est la probabilité de chaque événement L_i ?

b) Quelle est la probabilité que toutes les lettres arrivent à leurs correspondants ?

c) Les événements (L_i) sont-ils mutuellement indépendants ?

d) Sont-ils deux à deux indépendants ?

Solution (**Ex.1 –** *L'épistolaire distrait*)

1. a) On numérote les lettres et les destinataires de sorte que la lettre numéro i est destinée au destinataire numéro i.

Plusieurs propositions :

(i) $\Omega = \{(d_1, \dots, d_n), \forall i \in [\![1\,;\ n]\!], d_i \in [\![1\,;\ n]\!] \text{ et } \forall i \neq j, d_i \neq d_j\}$ où, pour tout i, d_i est le numéro du destinataire recevant la lettre i.

(ii) En se plaçant sous l'angle des lettres :

$\Omega = \{(\ell_1, \dots, \ell_n), \forall i \in [\![1\,;\ n]\!], \ell_i \in [\![1\,;\ n]\!] \text{ et } \forall i \neq j, \ell_i \neq \ell_j\}$ où, pour tout i, ℓ_i est le numéro de la lettre reçue par le destinataire numéro i.

(iii) Et sous l'aspect fonctionnel : $\Omega = \{f : [\![1\,;\ n]\!] \to [\![1\,;\ n]\!] \text{ } \textit{bijective}\}$ où f envoie (quasiment au sens propre) la lettre numéro i au destinataire numéro $f(i)$.

b) Notons A l'événement « La première lettre écrite arrive à son destinataire » et B l'événement « Toutes les lettres arrivent à leur destinataire ».

Avec l'univers type (i) :

$\mathrm{A} = \{(1, d_2, \dots, d_n), \forall i \in [\![2\,;\ n]\!], d_i \in [\![2\,;\ n]\!] \text{ et } \forall i \neq j, d_i \neq d_j\}$

$\mathrm{B} = \{(1, 2, 3, \dots, n)\}$

Avec l'univers type (ii) :

$\mathrm{A} = \{(1, \ell_2, \dots, \ell_n), \forall i \in [\![2\,;\ n]\!], \ell_i \in [\![2\,;\ n]\!] \text{ et } \forall i \neq j, \ell_i \neq \ell_j\}$

$\mathrm{B} = \{(1, 2, 3, \dots, n)\}$

Avec l'univers type (iii) :

$\mathrm{A} = \{f : [\![1\,;\ n]\!] \to [\![1\,;\ n]\!] \text{ } \textit{bijective et } f(1) = 1\}$ et $\mathrm{B} = \{id_{[\![1\,;\ n]\!]}\}$.

2. a) Que l'on choisisse les modèles (i), (ii) ou (iii), $\mathrm{Card}\,(\Omega) = n!$.

$\mathrm{Card}\,(\mathrm{L}_1) = \mathrm{Card}\,(\mathrm{A}) = (n-1)!$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{L}_1) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

Un raisonnement analogue donne : $\forall i \in [\![1\,;\ n]\!], \mathbb{P}(\mathrm{L}_i) = \dfrac{1}{n}$.

b) $\mathrm{Card}\,(\mathrm{B}) = 1$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{n!}$.

c) & **d)** $\mathrm{P}(\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)} \neq \dfrac{1}{n^2} = \mathbb{P}(\mathrm{L}_1)\mathbb{P}(\mathrm{L}_2)$, donc L_1 et L_2 ne sont pas indépendants. Donc les (L_i) ne sont pas deux à deux indépendants, donc pas mutuellement non plus.

Exercice 2 *Minimum et maximum*

On tire successivement une à une et avec remise n boules dans une urne en contenant B numérotées de 1 à B. Soit $k \in [\![1\,;\ \mathrm{B}]\!]$ fixé. Déterminer la probabilité des événements :

- S_k « le plus grand numéro obtenu est inférieur ou égal à k »,
- G_k « le plus grand numéro obtenu est vaut k »,
- I_k « le plus petit numéro obtenu est supérieur ou égal à k »,
- P_k « le plus petit numéro obtenu est vaut k ».

Solution (**Ex.2 –** *Minimum et maximum*)

Première méthode : par explicitation de l'univers et dénombrement

L'ensemble des tirages possibles (univers) est $\Omega = [\![1\,;\ \mathrm{B}]\!]^n$ car les tirages se font avec remise. Il est muni de l'équiprobabilité.

On a : $\mathrm{Card}\,(\Omega) = \mathrm{B}^n$.

- $\mathrm{S}_k = [\![1\,;\ k]\!]^n$ et par équiprobabilité, $\mathbb{P}(\mathrm{S}_k) = \dfrac{\mathrm{Card}\,(\mathrm{S}_k)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{k^n}{\mathrm{N}^n}$
- De $\mathrm{S}_k = \mathrm{G}_k \dot\cup \mathrm{S}_{k-1}$ on tire $\mathbb{P}(\mathrm{G}_k) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_k) - \mathbb{P}(\mathrm{S}_{k-1}) = \dfrac{k^n - (k-1)^n}{\mathrm{N}^n}$,

relation valable y compris pour $k = 1$ car $\mathbb{P}(\mathrm{G}_1) = \dfrac{1}{n^{\mathrm{N}}}$.

• $I_k = [\![k\,;\ N]\!]^n$ et par équiprobabilité, $\mathbb{P}(I_k) = \dfrac{\text{Card}\,(I_k)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{(N-k+1)^n}{N^n}$

• De $I_k = P_k \dot{\cup} I_{k+1}$ on tire $\mathbb{P}(P_k) = \mathbb{P}(I_k) - \mathbb{P}(I_{k+1}) = \dfrac{(N-k+1)^n - (N-k)^n}{N^n}$, relation valable y compris pour $k = N$ car $\mathbb{P}(P_N) = \dfrac{1}{n^N}$.

Seconde méthode : par décomposition des événements

• Soit pour $(i,j) \in [\![1\,;\ n]\!] \times [\![1\,;\ B]\!]$ l'événement A_i : « le i-ème numéro est inférieur ou égal à k ».

$S_k = \bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i$, et par indépendance des A_i car les tirages ont lieu avec remise, $\mathbb{P}(S_k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$. Or par équiprobabilité $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{k}{N}$ pour tout i de $[\![1\,;\ n]\!]$.

Donc $\mathbb{P}(S_k) = (\dfrac{k}{N})^n$.

• Soit pour $(i,j) \in [\![1\,;\ n]\!] \times [\![1\,;\ B]\!]$ l'événement B_i : « le i-ème numéro est supérieur ou égal à k ».

$I_k = \bigcap_{1 \leq i \leq n} B_i$, et par indépendance des B_i car les tirages ont lieu avec remise, $\mathbb{P}(I_k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)$. Or par équiprobabilité $\mathbb{P}(B_i) = \dfrac{N-k+1}{N}$ pour tout i de $[\![1\,;\ n]\!]$.

Donc $\mathbb{P}(I_k) = (\dfrac{N-k+1}{N})^n$.

Pour G_k et P_k, on raisonne comme par la Premiére méthode.

Exercice 3 *Jeu équitable*

Deux archers se disputent un match selon les règles suivantes :

• A et B tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche.

• A tire en premier (il tirera donc aux rangs impairs).

• Les réussites aux tirs sont supposées mutuellement indépendantes.

• La probabilité que A touche la cible, à chaque tir, est p_1.

• De même, la probabilité que l'archer B touche la cible est p_2.

On note $q_i = 1 - p_i$ pour $i = 1$ et $i = 2$.

1. Calculer la probabilité que A l'emporte au rang $2n+1$.
2. Calculer la probabilité que B l'emporte au rang $2n+2$.
3. On note G_1 (resp. G_2) l'événement « A (resp. B) l'emporte ».
   Calculer $\mathbb{P}(G_1)$ et $\mathbb{P}(G_2)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2)$ et en déduire la probabilité que le match dure indéfiniment.
5. On dira que le match est équilibré lorsque $\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(G_2)$.
   Montrer que ceci est réalisé si, et seulement si, $p_2 = \dfrac{p_1}{1-p_1}$.

Solution (**Ex.3 –** *Jeu équitable*)

1. En notant A_n l'événement dont on cherche la probabilité, $P(A_n) = p_1(q_1q_2)^n$ car on doit avoir indépendamment n échecs et un succès de A, et n échecs de B.
2. $\mathbb{P}(B_n) = p_2 q_2^n q_1^{n+1}$ par un raisonnement analogue.
3. $\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \overset{textincomp.'}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \dfrac{p_1}{1-q_1q_2}$ car somme géométrique de raison $q_1q_2 \in]\,0\,;\ 1[$.
   Et de façon analogue : $\mathbb{P}(G_2) = \dfrac{q_1p_2}{1-q_1q_2}$.
4. Comme $p_1 + q_1p_2 = (1-q_1) + q_1(1-q_2) = 1 - q_1q_2$, $\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2) = 1$: la probabilité que la match dure indéfiniment est nulle.
5. **a)** $\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(G_2) \iff p_1 = q_1p_2 \iff p_2 = \dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{p_1}{1-p_1}$
6. **a)** Si $p_1 = 1/2$, alors le jeu équitable si, et seulement si, $p_2 = 1$... logique non ?
   b) Si le jeu est équitable, alors : $p_1 > 1/2 \Longrightarrow 1 - p_1 < 1/2 \Longrightarrow p_2 > 1$, impossible. Le jeu ne peut pas être équitable si $p_1 > 1/2$.

Exercice 4 *Ruine du joueur*

Un joueur joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. Les lancers successifs sont indépendants, et le joueur gagne 1 euro chaque fois qu'il obtient pile et perd un euro pour chaque face. Le joueur doit disposer d'au moins 1 euro pour jouer, et le jeu prend fin dès qu'il est ruiné ou qu'il dispose d'un capital de N euros ($N \geq 3$ est fixé par avance).

On note u_k la probabilité que le joueur soit ruiné lorsqu'il possède k euros au départ du jeu ($0 \leq k \leq \mathrm{N}$).

1. On convient que $u_0 = 1$ et $u_\mathrm{N} = 0$. Justifier cette convention.

2. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :
$$\forall k \in [\![1\,;\ \mathrm{N}-1]\!], \quad u_k = \tfrac{1}{2}u_{k+1} + \tfrac{1}{2}u_{k-1}.$$

3. Exprimer u_k en fonction de k et N.

4. Interpréter, à k fixé, $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} u_k$.

Solution (**Ex.4 –** *Ruine du joueur*)

1. S'il possède 0 euro au départ, il ne peut pas jouer et l'événement « être ruiné » est certain. S'il possède déjà N euros, il ne joue pas puisque qu'il dispose du capital requis et ne sera jamais ruiné.

2. Notons U_k l'événement « le joueur soit ruiné lorsqu'il possède k euros au départ du jeu » où $0 \leq k \leq \mathrm{N}$, P l'événement le premier lancer donne *pile*. Avec le système complet $(\mathrm{P}, \overline{\mathrm{P}})$, la formule des probabilités totales donne :
$u_k = \mathbb{P}(\mathrm{P})\mathbb{P}_\mathrm{P}(\mathrm{U}_k) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{P}})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{P}}}(\mathrm{U}_k) = \dfrac{1}{2}u_{k-1} + \dfrac{1}{2}u_{k+1}$.

3. u vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2} \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0$, dont l'unique racine est 1.
Donc : $\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall k \in [\![0\,;\ \mathrm{N}]\!], u_k = 1^k(ak+b) = ak + b$ (on se limite à $[\![0\,;\ \mathrm{N}]\!]$ car $\forall k \geq \mathrm{N}, u_k = 0$...)
Avec les conditions limites $u_0 = 1$ et $u_\mathrm{N} = 0$, $b = 1$ et $a\mathrm{N} + b = 0$ donc $a = -1/\mathrm{N}$. Ainsi : $\forall k \in [\![0\,;\ \mathrm{N}]\!], u_k = 1 - (k/\mathrm{N})$.
À k fixé, $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} u_k = 1$, donc avec une fortune initiale fixée k, plus on fixe le seuil N grand, et plus on risque de finir ruiné.

Exercice 5 *Rang pair ou rang impair*

On effectue une succession de lancers d'une pièce dont la probabilité d'amener pile est $p \in]\,0\,;\ 1\,[$ à chaque lancer, indépendamment d'un lancer à l'autre.

1. Montrer que la probabilité que pile apparaisse au moins une fois au cours de ces lancers vaut 1.

2. Déterminer la probabilité de l'événement I : *« le premier "pile" apparaît lors d'un tirage de rend impair ».*

3. L'événement I est-il plus probable que son contraire ?

Solution (**Ex.5 –** *Rang pair ou rang impair*)

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, P_n l'événement « pile apparaît au n-ème lancer ».
Soit pour $n \in \mathbb{N}$, PP_n l'événement « le premier pile apparaît au n-ème lancer ».
On a :
$\mathbb{P}(\mathrm{PP}_n) = \mathbb{P}\big(\overline{\mathrm{P}_1} \cap \cdots \cap \overline{\mathrm{P}_{n-1}} \cap \mathrm{P}_n\big)$, et par indépendance,
$\mathbb{P}(\mathrm{PP}_n) = \mathbb{P}\big(\overline{\mathrm{P}_1}\big) \ldots \mathbb{P}\big(\overline{\mathrm{P}_{n-1}}\big)\mathbb{P}\big(\mathrm{P}_n\big) = (1-p)^{n-1}p$.
On a : $\mathrm{I} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{PP}_{2k+1}$, et comme les PP_n sont deux à deux incompatibles,
$$\mathbb{P}(\mathrm{I}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{PP}_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{2k}p = p\sum_{k=0}^{+\infty} \big((1-p)^2\big)^k = \frac{p}{1-(1-p)^2}$$
$$\mathbb{P}(\mathrm{I}) = \frac{p}{p(2-p)} = \frac{1}{2-p}$$

1. $2 - p < 2$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{I}) > \dfrac{1}{2}$. Donc il est plus probable que le premier « pile » sorte à un rang impair qu'à un rang pair (idem pour le premier « face » d'ailleurs).