Exercice 1 *Jeu équitable ?*

Alice et Bérénice s'affrontent au jeu suivant :

(i) à chaque tour, Alice lance deux fois une pièce équilibrée tandis que Bérénice ne lance qu'une fois une pièce qui amène pile avec la probabilité $p \in]\,0\,;\ 1[$;

(ii) si les deux joueuses obtiennent le même nombre de pile, on procède à un nouveau tour de jeu ;

(iii) le jeu s'arrête au premier tour durant lequel l'une des joueuses obtient strictement plus de pile que l'autre ;

(iv) la gagnante est celle qui a obtenu le plus de pile.

.

On définit les événements suivants :
B_1 : « Bérénice obtient un pile lors de son premier lancer » ;
A_n : « Alice gagne à l'issue du n-ième tour » ;
E_n : « Il y a égalité du nombre de pile lors du n-ième tour » (si celui-ci a lieu, évidemment).

Justifiez tous les calculs ! ! !

1. À l'aide du système complet d'événements $(\mathrm{B}_1, \overline{\mathrm{B}_1})$ et de la formule des probabilités totales, déteminer la probabilité de E_1.
2. Déterminer la probabilité que le jeu ne se termine jamais.
3. Déterminer la probabilité de l'événement A_1.
4. Déterminer la probabilité qu'Alice gagne la partie.
5. Existe-il un p tel que le jeu est équitable ?

Exercice 2 *Somme d'une série entière et étude aux bords*

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1+(n-2)!}{n!} x^n.$$

2. On note, pour $x \in \mathbb{R}$ et sous-réserve de convergence,

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1+(n-2)!}{n!} x^n.$$

a) Déterminer $\mathrm{S}(x)$ pour $x \in]-\mathrm{R}\,;\ \mathrm{R}[$.
b) Montrer que $\mathrm{S}(\mathrm{R})$ est définie, en précisant sa valeur, et que S est continue sur $[\,0\,;\ \mathrm{R}]$.
c) Montrer que $\mathrm{S}(-\mathrm{R})$ est définie, puis que S est continue sur $[\,-\mathrm{R}\,;\ 0]$, et en déduire la valeur de $\mathrm{S}(-\mathrm{R})$.