Exercice 1 *Jeu équitable ?*
Alice et Bérénice s'affrontent au jeu suivant :

(i) à chaque tour, Alice lance deux fois une pièce équilibrée tandis que Bérénice ne lance qu'une fois une pièce qui amène pile avec la probabilité $p \in]\,0\,;\ 1\,[$;

(ii) si les deux joueuses obtiennent le même nombre de pile, on procède à un nouveau tour de jeu ;

(iii) le jeu s'arrête au premier tour durant lequel l'une des joueuses obtient strictement plus de pile que l'autre ;

(iv) la gagnante est celle qui a obtenu le plus de pile.

.

On définit les événements suivants :
B_1 : « Bérénice obtient un pile lors de son premier lancer » ;
A_n : « Alice gagne à l'issue du n-ième tour » ;
E_n : « Il y a égalité du nombre de pile lors du n-ième tour » (si celui-ci a lieu, évidemment).

1. À l'aide du système complet d'événements $(B_1, \overline{B_1})$ et de la formule des probabilités totales, déteminer la probabilité de E_1.
2. Déterminer la probabilité que le jeu ne se termine jamais.
3. Déterminer la probabilité de l'événement A_1.
4. Déterminer la probabilité qu'Alice gagne la partie.
5. Existe-il un p tel que le jeu est équitable ?

Solution (**Ex.1** – *Jeu équitable ?*)

1. En appliquant la formule des probabilités avec le système complet $(B_1, \overline{B_1})$,
$\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(E_1) + \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right)\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(E_1) = p\dfrac{1}{2} + (1-p)\dfrac{1}{4} = \dfrac{p+1}{4}$
2. **Remarque préliminaire :** Dans cet exercice issu d'un oral CCINP, la définition des E_n peut être interprétée de deux façons :
   — E_n : « il y a égalité au n-ème tour sans se soucier de ce qui s'est passé avant ». Dans ce cas, les (E_n) sont mutuellement indépendants. C'est le point de vue du corrigé fourni par CCINP, et c'est la voie suivi par mon corrigé, d'où l'introduction des événements F_n.
   — E_n : « il y a égalité du premier au n-ème tour ». Dans ce cas, les E_n ne sont plus indépendants, mais ils forment une suite croissante.

   Allons-y... Notons J l'événement « *le jeu ne se termine jamais* » de sorte que
$$J = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} E_n.$$
   Malheureusement la suite (E_n) n'est pas décroissante. Mais la suite (F_n) suivante l'est :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} E_i.$$
   F_n signifie : égalité du premier jusqu'au n-ème tour...
   Par **indépendance** des E_i, tous de probabilité $\mathbb{P}(E_1)$,
$$\mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(E_1)^n = \left(\frac{p+1}{4}\right)^n.$$
   Et par **continuité monotone** :
$$\mathbb{P}(J) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(F_n) = 0 \quad \text{car } \frac{p+1}{4} \in]\,0\,;\ 1\,[.$$
3. Toujours avcec le système complet $(B_1, \overline{B_1})$,
$P(A_1) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(A_1) + \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right)\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(A_1) = p\dfrac{1}{4} + (1-p)\dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{2}p + \dfrac{3}{4} = \dfrac{3-2p}{4}.$
4. Notons A l'événement « *Alice gagne la partie* », de sorte que
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n,$$
   où cette réunion est une **réunion d'événements deux à deux incompatibles**.
   De plus : $A_n = F_{n-1} \cap C_n$ où C_n est « *Alice remporte le n-ème tour* », de probabilité $\mathbb{P}(A_1)$ et indépendant de F_{n-1}.
   Donc : $P(A_n) = \left(\dfrac{p+1}{4}\right)^{n-1} \dfrac{3-2p}{4}$ (y compris pour $n = 1$).
   Par **σ-additivité** $\quad \mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \frac{3-2p}{4}\,\frac{1}{1-(p+1)/4} = \frac{3-2p}{3-p}.$
   Une ruse : Ci-dessus, j'ai développé le corrigé fourni par CCINP, on peut faire mieux.
   $A = A_1 \cup (E_1 \cap A)$ puisqu'Alice peut gagner soit au premier tour, soit après.

Par **incompatibilité** : $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_1) + \mathbb{P}(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{A}) = \dfrac{3-2p}{4} + \dfrac{p+1}{4}\mathbb{P}_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{A})$
Comme en cas d'égalité au premier tour, le jeu recommence comme au départ suivant les mêmes règles, on a

$$\mathbb{P}_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}).$$

Et c'est fini car on a alors $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{3-2p}{4} + \dfrac{p+1}{4}\mathbb{P}(\mathrm{A})$, d'où
$4\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 3-2p+(p+1)\mathbb{P}(\mathrm{A})$, soit $(3-p)\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 3-2p$, donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{3-2p}{3-p}, \text{ bien joué !}$$

5. Le jeu est équitable si et seulement $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{2}$ puisqu'il est exclu qu'il n'y ait pas de vainqueure par la question 2.
Et : $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{2} \iff 2(3-2p) = 3-p \iff p = 1.$
Dans ce cas, Bérénice fait systématiquement pile (sa pièce est truquée : elle possède deux piles et pas de face). C'est la seule possibilité pour que le jeu soit équitable... mais elle est exclue par l'hypothèse initiale $p \in]0\,;\,1[$.
Donc le jeu n'est jamais équitable et toujours favorable à Alice.

Exercice 2 *Somme d'une série entière et étude aux bords*

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1+(n-2)!}{n!}x^n.$$

2. On note, pour $x \in \mathbb{R}$ et sous-réserve de convergence,

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1+(n-2)!}{n!}x^n.$$

a) Déterminer $\mathrm{S}(x)$ pour $x \in]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$.
b) Montrer que $\mathrm{S}(\mathrm{R})$ est définie, en précisant sa valeur, et que S est continue sur $[0\,;\,\mathrm{R}]$.
c) Montrer que $\mathrm{S}(-\mathrm{R})$ est définie, puis que S est continue sur $[-\mathrm{R}\,;\,0]$, et en déduire la valeur de $\mathrm{S}(-\mathrm{R})$.

Solution (**Ex.2** – *Somme d'une série entière et étude aux bords*)

1. Je pose : $\forall n \geqslant 2, \quad a_n = \dfrac{1+(n-2)!}{n!}$.
L'usage du critère de D'Alembert ne s'impose pas...
Comme $1 \underset{n\to+\infty}{=} o((n-2)!)$, on a : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(n-2)!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$,
or $\mathrm{RC}\left(\sum n^{-2}x^n\right) = 1$ d'après le cours, donc $\boxed{\mathrm{R} = 1.}$

2. a) Pour $|x| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n = \mathrm{e}^x - 1 - x$.
De plus, $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}x^n = x\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1}x^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n$ (ces deux sommes existent !)
$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}x^n = x(-\ln(1-x)) - (-\ln(1-x) - x) = (1-x)\ln(1-x) + x.$
Donc $\boxed{\text{pour } |x| < 1,\ \mathrm{S}(x) = \mathrm{e}^x + (1-x)\ln(1-x) - 1.}$

b) Il est interdit d'utiliser la formule de 2.a) pour $x = 1$ ou $x = -1$.
$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 2$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1$ par télescopage.
Donc $\boxed{\mathrm{S}(1) \text{ est définie et vaut } \mathrm{e} - 1.}$
S est continue sur $[0\,;\,1[$ car somme d'une série entière (ou par l'expression précédent). De plus, $(1-x)\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ donc $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \mathrm{e} - 1 = \mathrm{S}(1)$, donc S est continue sur $[0\,;\,1]$.

c) Pour $x = -1$, la série définissant $\mathrm{S}(-1)$ est absolument convergente car $\left|\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.
On va montrer que S est continue sur $[-1\,;\,0]$ pour trouver sa valeur en -1. Pour cela, on montre la convergence uniforme en s'intéressant au reste d'ordre $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ noté R_N.
Soit $x \in [-1\,;\,0]$. $a_n x^n = a_n |x|^n (-1)^n$ avec $\left(a_n |x|^n\right)_n$ décroissante (car (a_n) et $(|x|^n)$ sont décroissantes) de limite nulle (car $a_n |x|^n \leq a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$).

En appliquant le théorème des séries alternées :

$$|\mathrm{R_N}(x)| = \left|\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} a_n x^n\right| \leq \left|a_{\mathrm{N}+1}\,|x|^{\mathrm{N}+1}\right| \leq a_{\mathrm{N}+1}.$$

Ceci pour tout $x \in [-1\,;\ 0]$, donc la fonction $\mathrm{R_N}$ est bornée sur $[-1\,;\ 0]$ et $||\mathrm{R_N}||_{\infty,[-1\,;\,0]} \leq a_{\mathrm{N}+1}$.
Comme $a_{\mathrm{N}+1} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$, $||\mathrm{R_N}||_{\infty,[-1\,;\,0]} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$ par encadrement.
La convergence de la série des fonctions $x \longmapsto a_n x^n$ est uniforme sur $[-1\,;\ 0]$ et chaque fonction $x \mapsto a_n x^n$ est continue, donc S est continue sur $[-1\,;\ 0]$.
Donc $\mathrm{S}(-1) = \lim\limits_{x\to-1} \mathrm{S}(x) = \mathrm{e}^{-1} + 2\ln(2) - 1$.
Finalement,

$$\boxed{\text{S est continue sur } [-1\,;\ 1],\ \mathrm{S}(1) = \mathrm{e} - 1 \text{ et } \mathrm{S}(-1) = \mathrm{e}^{-1} + 2\ln(2) - 1.}$$

Quelques remarques importantes :

1. Il ne suffit pas qu'une fonction admette une limite finie en un point pour y être continue. Prenons $f : [0\,;\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.
f est continue sur $[0\,;\ 1[$ comme S, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 0$ est finie comme $\lim\limits_{x\to1} \mathrm{S}(x)$ et pourtant f n'est pas continue en 1 puisque $f(1) = 1 \neq \lim\limits_{x\to1^-} f(x)$.

2. Il est interdit d'utiliser la formule établie pour $x \in\ ]-1\,;\ 1[$ en 2.a) pour $\boldsymbol{x = 1}$ ou $\boldsymbol{x = -1}$. Quoi ? Je l'ai déjà dit ? C'est que ça doit être vrai...

3. Cet exercice est un oral de CCINP dont j'ai respecté la démarche. Mais on peut traiter 2.b) et 2.c) de **façon plus expéditive.**
En fait : $\forall x \in [-1\,;\ 1]$, $\quad |a_n x^n| \leqslant a_n$, donc les fonctions $g_n : x \longmapsto a_n x^n$ sont bornées et $||g_n||_{\infty,[-1\,;\,1]} = a_n$.
Donc la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement, vers S, donc uniformément, et puisque toutes les g_n sont continues, **S est continue sur [-1, 1]**. Ce qui permet d'obtenir $\mathrm{S}(-1)$ et $\mathrm{S}(1)$ en passant à la limite dans l'expression de 2.a) valable sur $]-1\,;\ 1[$.

4. Le résultat $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$ est vrai mais n'est pas contenu dans le cours, car le DSE de $\ln(1-x)$ n'est a priori pas utilisable en $x = -1$.
Exercice : Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$ converge uniformément sur $[0\,;\ 1]$ et en déduire la somme précédente.