Centrale 2008 PC II - Première partie

Notations

- Dans ce problème, $\mathcal{S}(\mathbf{C})$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des suites de complexes $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
- Pour $k \in \mathbf{N}, k > 2, \mathcal{S}(\mathbf{C}^k)$ représente l'espace vectoriel des suites $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ formées de vecteurs de $\mathbf{C}^k$.
- On note $\mathcal{M}_k(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à k lignes à coefficients dans $\mathbf{C}$.

Question préliminaire

Soit une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C}), M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
On note $e = \det(M)$. On suppose $e \neq 0$.
- Calculer le produit matriciel $M \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- En déduire l'expression de la matrice M^{-1} en fonction de a, b, c, d, e.

A - Récurrences linéaires d'ordre 2

On considère ici les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbf{C})$ pour lesquelles il existe des complexes a_1 et a_0 vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}, x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0.$$

On associe à une telle suite de $\mathcal{S}(\mathbf{C})$ la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbf{C}^2)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

A.1) Déterminer une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ telle que pour tout entier positif n, on ait :

$$X_{n+1} = AX_n.$$

A.2) Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si :

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

A.3) On suppose que A admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 et on note

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer les matrices Q inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ telles que $AQ = QD$.
b) Exprimer A^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices Q, Q^{-1}, des complexes λ_1, λ_2 et de l'entier n.
A.4) On suppose maintenant que A admet une seule valeur propre λ et on note

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

a) Exprimer a_1 et a_0 en fonction de λ.
b) Montrer que la matrice A est semblable à la matrice T et déterminer les matrices Q inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ telles que :

$$Q^{-1}AQ = T.$$

c) Exprimer A^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices Q, Q^{-1}, du complexe λ et de l'entier n.
A.5) Montrer que l'on a l'alternative suivante :
• soit A admet deux valeurs propres distinctes et elle est diagonalisable ;
• soit A admet une seule valeur propre et elle n'est pas diagonalisable.
A.6) Deux exemples numériques
Dans les deux exemples qui suivent, il est demandé de :
• expliciter la matrice A,
• donner une matrice de passage Q telle que $T = Q^{-1}AQ$ soit d'une forme simple comme ci-dessus,
• en déduire X_n puis x_n en fonction de x_0, x_1 et n
(il sera tenu compte de la simplicité et de la clarté des choix effectués).
a) **Exemple 1**
$(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0.$$

b) **Exemple 2**
$(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0.$$

B - Vers un ordre supérieur, à petits pas

On note Φ l'application qui à $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ élément de $\mathcal{S}(\mathbf{C})$ associe la suite des vecteurs $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbf{C}^3)$ définie par $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Ainsi, les trois premiers termes de la suite $(\Phi(x_n)_{n\in\mathbf{N}})$ sont $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

À tout polynôme unitaire de $\mathbf{C}_3[X]$, $P(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, on associe le sous-espace $\mathcal{R}_\mathcal{P}$ de $\mathcal{S}(\mathbf{C})$ formé des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$x_{n+3} + a_2x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0,$$

ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$.
B.1) Calculer le polynôme caractéristique de A.
B.2) Vérifier que : $\Phi : \mathcal{S}(\mathbf{C}) \to \mathcal{S}(\mathbf{C}^3)$ est linéaire et injective. Est-elle surjective ?
B.3)
a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{R}_\mathcal{P}$. Montrer que son image $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par Φ vérifie :

$$\forall n \in \mathbf{N}, X_n = A^n X_0.$$

b) Montrer que réciproquement, toute suite de $\mathcal{S}(\mathbf{C}^3)$ pour laquelle on a $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, est élément de $\Phi(\mathcal{R}_{\mathcal{P}})$.

B.4) Montrer que $\Phi(\mathcal{R}_{\mathcal{P}})$ est le sous-espace de $\mathcal{S}(\mathbf{C}^3)$ engendré par les suites de vecteurs $(A^n e_1)_{n\in\mathbf{N}}$, $(A^n e_2)_{n\in\mathbf{N}}$, $(A^n e_3)_{n\in\mathbf{N}}$, où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbf{C}^3$.
En déduire la dimension de $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$.

C - Des exemples (quasi) numériques

On introduit ici quelques exemples de polynômes $P(X)$ et on se propose d'étudier le comportement à l'infini des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$.

C.1) Exemple 1

On considère ici le polynôme : $P(X) = X^3 - 2X^2 + \dfrac{3}{2}X - \dfrac{1}{2}$.

a) Écrire la matrice A qui lui est associée. Justifier qu'elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$.

b) Choisir une valeur explicite simple de $X_0 \in \mathbf{R}^3$. Après un calcul effectif des premiers termes de la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$, conjecturer la limite de cette suite de vecteurs.

c) Vérifier que $Q^{-1}AQ = T$ où $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

d) Calculer T^2, T^3 et T^4.
En déduire la valeur de T^{4p+k} pour $p \in \mathbf{N}$ et $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

e) Exprimer pour tout entier naturel n le vecteur $Y_n = Q^{-1}X_n$ en fonction de $Y_0 = Q^{-1}X_0$.
En déduire que les suites $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\Phi(\mathcal{R}_{\mathcal{P}})$ et de $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ convergent.
Attention : $(Yn)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas dans $\Phi(\mathcal{R}_{\mathcal{P}})$!

C.2) Exemple 2

Dans cette question, on considère le polynôme : $P(X) = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$.

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice A associée à $P(X)$.

b) En déduire que les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ appartenant à $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ sont périodiques et que, à toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ appartenant à $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$, on peut associer trois nombres complexes α, β, γ tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, x_n = \alpha + \beta \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \gamma \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

C.3) Exemple 3

Dans cette question, on considère le polynôme :

$$P(X) = (X - \lambda)(X - \mu)^2$$

où λ et μ désignent deux nombres réels distincts.

a) Préciser la matrice A associée à ce polynôme.

b) On admet que $Q^{-1}AQ = T$ avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \\ \lambda^2 & \mu^2 & 2\mu \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

En déduire que si le polynôme P admet une racine double, la matrice A qui lui est associée n'est pas diagonalisable.

c) À quelles conditions surλ et μ a-t-on chacune des propriétés suivantes :

- pour tout $X_0 \in \mathbf{R}^3, \lim_{n\to\infty} X_n = 0$?
- pour tout $X_0 \in \mathbf{R}^3, (X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge ?

BONNES FÊTES DE FIN D'ANNÉE ! ! !