D.M.5 Centrale 2008 - Corrigé

Question préliminaire

Puisque $\det(\mathrm{M}) = e \neq 0$, la matrice M est inversible. De plus, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = e\mathrm{I}_2$. On en déduit que $\mathrm{M}^{-1} = \dfrac{1}{e} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

A – Récurrences linéaires d'ordre 2

A.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathrm{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{AX}_n$, où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$.

A.2 Le polynôme caractéristique de A est $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - \mathrm{Tr}(\mathrm{A})\mathrm{X} + \det(\mathrm{A}) = \mathrm{X}^2 + a_1\mathrm{X} + a_0$. Ainsi, $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \iff \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$.

A.3 a) Quand on cherche les matrices Q telles que AQ = QD, avec on obtient $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} x & y \\ \lambda_1 x & \lambda_2 y \end{pmatrix}$, avec $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

Le déterminant vaut $xy(\lambda_2 - \lambda_1)$, donc Q est inversible si, et seulement si, $(x, y) \in (\mathbb{C}^*)^2$.

b)Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^n = \mathrm{QD}^n\mathrm{Q}^{-1} = \mathrm{Q} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \mathrm{Q}^{-1}$.

A.4 a) On a $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = -a_1 = 2\lambda$, $\quad \det(\mathrm{A}) = a_0 = \lambda^2$..

b) Quand on cherche les matrices Q telles que AQ = QD, avec on obtient $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} x & y \\ \lambda x & x + \lambda y \end{pmatrix}$, avec $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

Le déterminant vaut x^2, donc Q est inversible si, et seulement si, $x \in \mathbb{C}^*$.

La matrice A est alors semblable à $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, en prenant par exemple $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

c)Comme $\mathrm{T} = \lambda\mathrm{I}_2 + \mathrm{E}_{1,2}$ et $\mathrm{E}_{1,2}^2 = 0$, on obtient par la formule du binôme et parce que I_2 et $\mathrm{E}_{1,2}$ commutent $\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{A}^n = \mathrm{Q} \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} .\mathrm{Q}^{-1}$.

A.5 On travaille dans $\mathbb{C}$ donc A possède au moins une valeur propre, χ_{A} ayant au moins une racine, et au plus deux, χ_{A} étant de degré 2.

- Si A admet deux valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable puisqu'elle a autant de .
- Si A admet une valeur propre double λ, alors A n'est pas diagonalisable, car sinon elle serait semblable à $\lambda\mathrm{I}_2$, donc égale à $\mathrm{P}^{-1}\lambda\mathrm{I}_2\mathrm{P} = \lambda\mathrm{I}_2$, ce qui est faux.

A.6 – Exemples

Exemple 1. $a_0 = 2$, $a_1 = -3$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$..

Avec $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = (2 - 2^n)x_0 + (2^n - 1)x_1$..

Exemple 2. $a_0 = 4$, $a_1 = -4$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$..

Avec $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = -(n-1)2^n x_0 + n2^{n-1}x_1$..

B – Vers un ordre supérieur à petits pas

B.1 En développant suivant la dernière ligne, on obtient $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{X} & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 + \mathrm{X} \end{vmatrix} = \mathrm{X}^3 + a_2\mathrm{X}^2 + a_1\mathrm{X} + a_0$.

Ainsi, $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{P}$.

B.2 Soient $(x, y) \in \mathcal{S}(\mathbb{C})^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi(\alpha x + \beta y)_n = \begin{pmatrix} \alpha x_n + \beta y_n \\ \alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1} \\ \alpha x_{n+2} + \beta y_{n+2} \end{pmatrix} =$ $\alpha\Phi(x)_n + \beta\Phi(y)_n$. Ainsi, Φ est linéaire.

Si $\Phi(x) = 0$, alors $x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = 0$ pour tout n, donc $x = 0$. Ainsi, Φ est injective.

Soit $\mathrm{Y} \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$ défini par $\mathrm{Y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et : $\forall n \geqslant 1$, $\mathrm{Y}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors $\mathrm{Y} \notin \mathrm{Im}(\Phi)$: en effet, si $\mathrm{Y} = \Phi(\mathrm{X})$ alors $x_1 = 1$ d'après Y_0 mais $x_1 = 0$ d'après Y_1, ce qui est absurde. Donc Φ n'est pas surjective.

B.3

a) Soit $x \in \mathcal{R}_{\mathrm{P}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \mathrm{AX}_n$. Ainsi, $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$.

b) Réciproquement, si (X_n) vérifie $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_n$, elle vérifie $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$, alors (x_n) vérifie $x_{n+3} = -a_2x_{n+2} - a_1x_{n+1} - a_0x_n$, donc $x \in \mathcal{R}_{\mathrm{P}}$ et $\mathrm{X} = \Phi(x)$.

B.4 On a $\Phi(\mathcal{R}_{\mathrm{P}}) = \{(\mathrm{A}^n\mathrm{X}_0)_{n\in\mathbb{N}} \mid \mathrm{X}_0 \in \mathbb{C}^3\}$. Ainsi, $\Phi(\mathcal{R}_{\mathrm{P}}) = \mathrm{Vect}\big((\mathrm{A}^n e_1), (\mathrm{A}^n e_2), (\mathrm{A}^n e_3)\big)$. Cette famille est libre, donc $\dim(\mathcal{R}_{\mathrm{P}}) = 3$.

C – Exemples (quasi) numériques

C.1 – Exemple 1

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $\chi_A = (X-1)\left(X - \dfrac{1+i}{2}\right)\left(X - \dfrac{1-i}{2}\right)$, scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

b) En calculant successivement $X_n = A^n X_0$ avec $X_0 = (1,0,0)^T$, on obtient $X_1 = (0,0,1/2)^T$, $X_2 = (0,1/2,1)^T$, $X_3 = (1/2,1,5/4)^T$, $X_4 = (1,5/4,5/4)^T$ et $X_5 = (5/4,5/4,9/8)^T$. On peut conjecturer numériquement la convergence vers $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) La matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible car son déterminant vaut $-1 \neq 0$, et **on évite d'inverser Q SURTOUT EN TEMPS LIMITÉ** mais on vérifie $AQ = QT$, donc $Q^{-1}AQ = T$, où $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

d) **On évite les fractions** en écrivant $T = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{1}{2}B \end{array}\right)$, et B est le bloc $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Par produit de matrices diagonales par blocs, $T^k = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{1}{2^k}B^k \end{array}\right)$

Or $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B^4 = -4I_2$.

En particulier $B^{4k} = (-4)^k I_2$ et $\dfrac{1}{2^{4k}}B^{4k} = \dfrac{(-1)^k}{4^k} I_2$. Finalement :

$$T^{4p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/4)^p & 0 \\ 0 & 0 & (-1/4)^p \end{pmatrix},$$

$$T^{4p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/4)^p/2 & -(-1/4)^p/2 \\ 0 & (-1/4)^p/2 & (-1/4)^p/2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^{4p+2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(-1/4)^p/2 & \\ 0 & 0 & (-1/4)^p/2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^{4p+3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(-1/4)^p/4 & -(-1/4)^p/4 \\ 0 & (-1/4)^p/4 & -(-1/4)^p/4 \end{pmatrix},$$

En particulier les 4 sous-suites précédentes convergent vers la même limite, donc (T^n) converge vers $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

e) Ainsi, pour tout X_0, $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0 = \mathrm{Q}\mathrm{T}^n\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{X}_0$ donc $\mathrm{Y}_n = \mathrm{T}^n\mathrm{Y}_0$, donc (Y_n) doncverge vers $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{Y}_0$.

Donc $(\mathrm{X}_n) = (\mathrm{Q}\mathrm{Y}_n)$ converge vers $\mathrm{Q}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 - 2x_1 + 2x_2 \\ x_0 - 2x_1 + 2x_2 \\ x_0 - 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$

Donc la suite (x_n) converge vers $x_0 - 2x_1 + 2x_2$.

C.2 Le polynôme caractéristique est $\chi_\mathrm{A} = -(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1) = -(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X} + e^{i\pi/3})(\mathrm{X} + e^{-i\pi/3})$. En ne considérant que la première composante de la suite (X_n), on voit que la suite (x_n) est une combinaison linéaire des trois suites (1), $(e^{in\pi/3})$ et $e^{-in\pi/3})$ et donc aussi des suites (1), $(\cos(n\pi/3))$ et $(sin(n\pi/3))$. On en déduit que $\mathcal{R}_\mathrm{P} \subset \mathrm{V}ect((1), (\cos(n\pi/3)), (sin(n\pi/3))$. Mais $\dim(\mathcal{R}_\mathrm{P}) = 3$ et finalement

Ainsi, $\mathcal{R}_\mathrm{P} = \mathrm{V}ect((1), (\cos(n\pi/3)), (sin(n\pi/3))$

En particulier toute suite de $\mathcal{R}_\mathrm{P}$ est 6-périodique.

C.3

a) $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - (\lambda + 2\mu)\mathrm{X}^2 + (\lambda^2 + 2\lambda\mu)\mathrm{X} - \lambda\mu^2$ donc $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda\mu^2 & -\mu^2 - 2\lambda\mu & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}$

b) La valeur propre μ est double et $\dim(\mathrm{E}_\mu) = \dim(\ker(\mathrm{A} - \mu\mathrm{I}_3)) = 1$, donc A n'est pas diagonalisable.

c) On obtient $\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \mu^n & n\mu^{n-1} \\ 0 & 0 & \mu^n \end{pmatrix}$. La convergence de (X_n) équivaut à celle de (λ^n), (μ^n) et $(n\mu^{n-1})$.

- $\forall \mathrm{X}_0, \quad \mathrm{X}_n \to 0 \iff (\lambda, \mu) \in \,]-1\,;\,1[^2$.
- $\forall \mathrm{X}_0, \quad (\mathrm{X}_n)\text{converge} \iff (\lambda, \mu) \in \,]-1\,;\,1] \times]-1\,;\,1[$.