Un corrigé du D.S. n° 4 : Sujet E3A PC 2021

Exercice 1

1. On reconnaît une série alternée. La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0.

D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

2.a) Pour tout $n \geq 0$, $\displaystyle\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

Pour $x \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ converge, donc on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions continues sur $[\,0\,;\,1[$ $f_n : x \mapsto x^{2n}(1-x)$ simplement convergente, de somme continue : on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

2.b Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \sum_{k=1}^{2\mathrm{N}+2}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

En faisant tendre N vers l'infini,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \ln(2).$$

3. Il s'agit de déterminer l'ensemble des x tels que la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$. converge.

— Si $|x| > 1$, la série diverge grossièrement car $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

— Si $|x| < 1$, la série est absolument convergente car $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\right| \leqslant |x|^n$.

— Si $x = 1$, la série converge et vaut $\ln(2)$.

— Si $x = -1$, la série diverge car $\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = \dfrac{-1}{n}$.

Conclusion : la fonction est définie sur $]-1,1]$.

4.a $\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} - \int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx = [\mathrm{Arctan}(x)]_0^1 - \left[\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1+x^2}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).$

4.b On procède comme pour les questions précédentes, avec $g_n(x) = (-1)^n x^{2n}(1-x)$.

La série de fonctions continues $\sum g_n$ converge simplement sur $[\,0\,;\,1]$ avec pour somme :

$\displaystyle\mathrm{S}(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \frac{1-x}{1+x^2}$, encore valable pour $x = 1$. S est continue.

$\displaystyle\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ donc la série de terme général $\displaystyle\int_0^1 |g_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge.

On peut donc appliquer le théorème d'interversion.

On obtient finalement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).$$

Exercice 2

5. Comme f est continue sur I, le théorème fondamental de l'analyse assure que la fonction F_1 : $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifie $\mathrm{F}_1' = f$.

6. La fonction $\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt$ est bien définie sur I.

Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt + \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$. Le premier terme est constant, et le second est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après la question précédente. Ainsi, $\mathrm{F}' = f$, et F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

7. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_k(t) = t^k e^t$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$ et vérifie, par croissances comparées, $|f_k(t)| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $t \to -\infty$.

Comme par parité $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$, le théorème de comparaison assure que f_k est intégrable sur $]-\infty, -1]$.

8. a) Bien-définition

Toute fonction $f \in \mathrm{E}_n$ est combinaison linéaire de $e_0, \dots, e_n$, donc $t \mapsto f(t)e^t$ est intégrable sur $]-\infty, x]$. Ainsi L est bien définie.

b) Linéarité

Pour $f, g \in \mathrm{E}_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{L}(\lambda f + g) = \lambda \mathrm{L}(f) + \mathrm{L}(g)$, par linéarité de l'intégrale. Donc L est linéaire.

9. Pour $f \in \mathrm{E}_n$, la fonction $g(x) = \mathrm{L}(f)(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x} f(x)\mathrm{e}^x = -g(x) + f(x)$. Autrement dit, g est solution de l'équation différentielle $y' + y = f(x)$.

10. Si $f \in \ker(\mathrm{L})$, alors $g = \mathrm{L}(f) = 0$, et donc comme $g' + g = f$, on a $f = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\mathrm{L}) = \{0_{\mathrm{E}_n}\}$.

11.a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{L}(e_0)(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x e^t\,dt = 1$. Donc $\mathrm{L}(e_0) = e_0$.

11.b) Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on effectue une intégration par parties en dérivant $t \mapsto t^{k+1}$ avec $\lim_{t \to -\infty} t^{k+1}\mathrm{e}^t = 0$:

$$\mathrm{L}(e_{k+1})(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x t^{k+1} e^t\,dt = x^{k+1} - (k+1)\mathrm{L}(e_k)(x).$$

Ainsi, $\mathrm{L}(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)\mathrm{L}(e_k)$.

11.c) Par récurrence sur k, à l'aide de la relation précédente, on montre que $\mathrm{L}(e_k) \in \mathrm{E}_n$ pour tout k de $[\![0\,;\, n]\!]$. Ainsi, L est un endomorphisme de E_n.

12. L est injective et E_n est de dimension finie, donc L est un automorphisme de E_n.

13. Étude spectrale

Soit λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

13.a) 0 n'est pas valeur propre car L est injective, donc $\lambda \neq 0$.

13.b) f vérifie $\mathrm{L}(f) = \lambda f$. Comme $\mathrm{L}(f) = g$ implique $g' + g = f$, on obtient $\lambda f' + \lambda f = f$,c'est-à-dire $\lambda f' + (\lambda - 1)f = 0$.

13.c) Distinguons deux cas :

— Si $\lambda = 1$, alors $f' = 0$ et f est constante.

— Si $\lambda \neq 1$, les solutions sont de la forme $f(x) = \mathrm{K}e^{(\frac{1}{\lambda}-1)x}$, où $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$.

13.d) Si $\lambda = 1$, les solutions sont constantes donc polynomiales.

Si $\lambda \neq 1$, les solutions sont du type $x \mapsto \mathrm{K}e^{\alpha x}$ avec $\alpha \neq 0$ donc ne sont pas polynomiales.

13.e La seule valeur propre de L est donc $\lambda = 1$, et $\mathrm{E}_1(\mathrm{L}) = \mathrm{Vect}(e_0)$. Ainsi, L n'est pas diagonalisable puisque $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp(L)}} \dim(\mathrm{E}_\lambda) = 1 < n + 1 = \dim(\mathrm{E}_n)$.

14. Pour $f \in \mathrm{E}_n$ et $g = \mathrm{L}(f)$, on a $g' + g = f$, donc $f = (\mathrm{D} + \mathrm{I}d)(g)$, d'où $\mathrm{L}^{-1} = \mathrm{D} + \mathrm{Id}$.

15. Dans la base canonique $\mathcal{B}$, la matrice de L^{-1} est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

car $\mathrm{L}^{-1}(e_k) = (\mathrm{D} + \mathrm{I}d)(e_k) = \begin{cases} e_0 & \text{si } k = 0 \\ ke_{k-1} + e_k & \text{si } k \in [\![1\,;\ n]\!] \end{cases}$

16. La matrice M est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1, donc $\mathrm{Sp}(\mathrm{L}^{-1}) = \{1\}$.

Comme $\mathrm{L}(f) = \lambda f \iff f = \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{L}(f) \iff \mathrm{L}^{-1}(f) = \dfrac{1}{\lambda} f$, $\mathrm{Sp(L)} = \left\{ \dfrac{1}{\lambda}, \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{L}^{-1}) \right\} = \{1\}$

Exercice 3

17. Soient r_1 et r_2 les racines de l'équation caractéristique associée. D'après les relations coefficients–racines, on a : $\begin{cases} r_1 r_2 = -1, \\ r_1 + r_2 = 1. \end{cases}$

Le discriminant vaut $\Delta = 5 > 0$, donc les racines sont réelles et de signes contraires. On peut les écrire : $r_1 = \gamma, \qquad r_2 = -\dfrac{1}{\gamma}$, avec $\gamma = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$.

18.a) Pour $n \geq 1$, on a $a_n = b_{n-1}$, donc : $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.

18.b) Les racines de l'équation caractéristique associée à (b_n) sont γ et $-\dfrac{1}{\gamma}$. Ainsi, (b_n) est combinaison linéaire des suites (γ^n) et $((-1/\gamma)^n)$, donc (2) ne convient pas. Et avec (1), l'expression ne vaut pas 0 lorsque $n = 0$. Donc (3) est la bonne réponse et $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\gamma^n - (-1)^n \gamma^{-n}\right)$.

18.c) Comme $a_{n+1} = b_n$, on obtient : $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\gamma^{n-1} + (-1)^n \gamma^{-(n-1)}\right)$.

18.d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + \gamma b_n = \dfrac{\gamma^{n-1} + \gamma^{n+1}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}}\left(\gamma + \dfrac{1}{\gamma}\right) = \gamma^n$.

19. En posant $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $\mathrm{V}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, on vérifie directement que $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{MV}_n$.

20. Le polynôme caractéristique de M est $\chi_{\mathrm{M}}(\mu) = \mu^2 - \mu - 1$. Ses racines sont γ et $-\dfrac{1}{\gamma}$, distinctes. Ainsi, M est diagonalisable.

Les sous-espaces propres sont : $\mathrm{E}_\gamma = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \end{pmatrix}$, $\qquad \mathrm{E}_{-1/\gamma} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -\gamma \\ 1 \end{pmatrix}$.

21. On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{M}^n = a_n\mathrm{I}_2 + b_n\mathrm{M}$.

Initialisation. Pour $n = 0$, $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, donc $\mathrm{M}^0 = \mathrm{I}_2$.

Hérédité. Supposons la relation vraie au rang n.

Alors : $\mathrm{M}^{n+1} = \mathrm{M}(a_n\mathrm{I}_2 + b_n\mathrm{M}) = b_n\mathrm{I}_2 + (a_n + b_n)\mathrm{M} = a_{n+1}\mathrm{I}_2 + b_{n+1}\mathrm{M}$ car $\mathrm{M}^2 = \mathrm{I}_2 + \mathrm{M}$.

22. On pose $\mathrm{C}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{M}^k}{k!}$. D'après la question précédente, $\mathrm{C}_n = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\right)\mathrm{I}_2 + \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!}\right)\mathrm{M}$.

En faisant tendre n vers l'infini et en utilisant les expressions explicites de a_k et b_k, on obtient :

$$\mathrm{C} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\gamma e^\gamma + \frac{1}{\gamma}e^{-1/\gamma}\right)\mathrm{I}_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(e^\gamma - e^{-1/\gamma}\right)\mathrm{M}.$$

23. Comme M est diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$, où $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$.

Alors $\mathrm{C} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{M}^k}{k!} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} e^\gamma & 0 \\ 0 & e^{-1/\gamma} \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$.

Ainsi, C est semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} e^\gamma & 0 \\ 0 & e^{-1/\gamma} \end{pmatrix}$.