D.S. n° 4 : Sujet E3A PC 2021
Durée : 3 heures

EXERCICE 1

1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

2. **(a)** Démontrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$.
On pourra utiliser un théorème d'intégration terme à terme.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction de variable réelle $\varphi : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.
Calculer $\varphi(1)$.

4. **(a)** Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(b) En calculant de deux façons différentes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right)$, déterminer la valeur de la somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$, après en avoir justifié l'existence.

EXERCICE 2

Question de cours
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $]-\infty,-1]$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}$ et F_1 la fonction qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.
Justifier que F_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F_1'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

6. Justifier que la fonction F qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

******

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note e_k la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathscr{B} = (e_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ la base canonique de E_n.
On note D l'endomorphisme de dérivation de E_n et Id l'endomorphisme identité de E_n.

7. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_k : t \mapsto t^k\mathrm{e}^t$ est intégrable sur $]-\infty,-1]$.

8. Soit $f \in E_n$. Montrer que l'on définit sur E_n une application linéaire L en posant $g = L(f)$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t.$$

9. Soit $g \in E_n$ tel que $g = L(f)$.
Montrer que g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + y = f(x)$.

10. En déduire $\mathrm{Ker}(L)$.

11. **(a)** Calculer $L(e_0)$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel $k \in [\![0, n-1]\!]$, $L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)L(e_k)$.

(c) En déduire que L est un endomorphisme de E_n.

12. Prouver que L est un automorphisme de E_n.

13. **Recherche des sous-espaces propres de** L

Soit λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

(a) Justifier que $\lambda \neq 0$.

(b) Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\lambda y' + (\lambda - 1)y = 0\,(*)$.

(c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(*)$.

(d) Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle $(*)$.

(e) En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme L et déterminer les vecteurs propres associés.

L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

14. Comparer L^{-1} et $D + \mathrm{Id}$.

15. Déterminer la matrice M de L^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.

16. Déterminer les valeurs propres de L^{-1}. Retrouver alors les valeurs propres de L.

EXERCICE 3

17. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$. Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $-\dfrac{1}{\gamma}$.

18. Soit (a_n) et b_n définies par $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & b_n \\ b_{n+1} & = & a_n + b_n \end{array} \right.$$

(a) Montrer que pour tout entier n strictement positif : $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.

(b) Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de b_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle ?

$$(1) \quad \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}; \qquad (2) \quad \frac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}; \qquad (3) \quad \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}.$$

(c) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de n.

(d) Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\gamma^n = a_n + b_n\gamma$.

19. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Déterminer une unique matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $V_{n+1} = MV_n$.

20. Justifier que M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

21. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_n \mathrm{I}_2 + b_n M$.

22. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}$.

Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite C à l'aide de γ et des matrices I_2 et M, c'est-à-dire montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_n et β_n tels que $C_n = \alpha_n \mathrm{I}_2 + \beta_n M$ et tels que $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ convergent. On notera alors α et β les limites de ces 2 suites et $C = \alpha \mathrm{I}_2 + \beta M$.

23. Montrer que la matrice C est semblable à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\gamma} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1/\gamma} \end{pmatrix}$.

On admettra que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} PM_nP^{-1} = P\left(\lim_{n\to+\infty} M_n\right)P^{-1}$.