D.S. n° 4 : Sujet Mines-Ponts PC 2025
Durée : 3 heures

Notations et définitions.

On note $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes, $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Pour $n \in \mathbf{N}^*, \mathbf{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées complexes de taille n et $\mathbf{GL}_n$ le groupe des matrices complexes inversibles de taille n. On rappelle que deux matrices A et B de $\mathbf{M}_n$ sont semblables si

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n, \quad A = P^{-1}BP.$$

Pour toute matrice $A \in \mathbf{M}_n$ le polynôme caractéristique de A est défini par

$$\chi_A = \det(XI_n - A).$$

Partie 1. Polynômes réciproques.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré p est dit réciproque lorsqu'il satisfait l'égalité

$$P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$$

1. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré p. On écrit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, où $a_0, \ldots a_p$ sont des nombres complexes, et $a_p \neq 0$. Montrer que P est réciproque si et seulement si pour tout entier $k, 0 \leq k \leq p$, on a l'égalité $a_k = a_{p-k}$.

2. Soit P un polynôme de degré p écrit sous forme factorisée $P = a_p \displaystyle\prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)^{m_i}$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ sont les racines complexes distinctes de P et $m_1, \ldots, m_d$ leurs multiplicités.

Écrire sous forme factorisée le polynôme $X^p P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et démontrer que si P est réciproque alors pour tout entier $i, 1 \leq i \leq d, \lambda_i$ est non nul et $\dfrac{1}{\lambda_i}$ est racine de P avec la multiplicité m_i.

3. Soit Q un polynôme de degré p. On dit que Q est antiréciproque si

$$Q(X) = -X^p Q\left(\frac{1}{X}\right)$$

Montrer que si Q est antiréciproque, 1 est une racine de Q et qu'il existe un polynôme P constant ou réciproque tel que $Q = (X-1)P$.

Soit R un polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ ayant la propriété suivante :

Toute racine a de R est non nulle et $\dfrac{1}{a}$ est racine de R de même multiplicité que a.

4. Démontrer que le produit des racines de R, comptées avec multiplicités, ne peut prendre que les valeurs 1ou -1. On pourra remarquer que l'égalité $a = \dfrac{1}{a}$ n'a lieu que pour $a = 1$ ou -1.

5. En déduire que R est réciproque ou antiréciproque.

Partie 2. Le cas diagonalisable.

Soit A une matrice appartenant à $\mathbf{GL}_n$.

6. Soit x un nombre réel non nul. Exprimer $\det(xI_n - A)$ en fonction de $x, \det(A)$ et $\det\left(\frac{1}{x}I_n - A^{-1}\right)$.

7. On suppose dans cette question que A est semblable à son inverse. Préciser les valeurs que peut prendre le déterminant de A, et en déduire que χ_A est soit réciproque, soit antiréciproque.

8. Soit $B \in \mathbf{M}_n$ une matrice diagonalisable. On suppose que le polynôme caractéristique de B est réciproque ou antiréciproque. Démontrer que B est inversible et semblable à son inverse.

9. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ n'est pas semblable à son inverse (bien que son polynôme caractéristique $(X-2)^2\left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2$ soit réciproque). On pourra déterminer les espaces propres de B et B^{-1} pour la valeur propre 2 .

Ainsi, hors du cas diagonalisable, le polynôme caractéristique ne suffit pas à caractériser les matrices semblables à leur inverse. La suite du problème se propose de caractériser ces matrices.

Partie 3. Produits de matrices de symétries.

On dit qu'un endomorphisme f d'un C -espace vectoriel E est une symétrie si $f \circ f = Id_E$. On dit qu'une matrice $S \in \mathbf{M}_n$ est une matrice de symétries si $S^2 = I_n$.

10. Démontrer que si S_1 et S_2 sont deux matrices de symétrie, la matrice produit $A = S_1S_2$ est inversible et semblable à son inverse.

11. Si une matrice A est un produit de deux matrices de symétries, en est-il de même de toute matrice semblable à A ?

Soit B et C deux matrices de $\mathbf{GL}_n$. Soit $A \in \mathbf{M}_{2n}$ la matrice définie par blocs suivante :

$$A = \begin{pmatrix} B & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix}$$

12. Soit S_1 la matrice par blocs

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix}$$

où P, Q sont deux éléments de $\mathbf{GL}_n$. Déterminer les conditions reliant B, C, P, Q pour que les matrices S_1 et $S_2 = S_1A$ soient des matrices de symétries.

13. En déduire que si C est semblable à B^{-1}, alors A est un produit de deux matrices de symétries.

Partie 4. La matrice $J_n(\lambda)$.

14. Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soit g un endomorphisme de E tel que $g^n = 0$ et $g^{n-1} \neq 0$. Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de g est la matrice N :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit : $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $n_{i,j} = 1$ si $j = i+1$ et $n_{i,j} = 0$ sinon.

15. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ non nul, on pose $J_n(\lambda) = \lambda I_n + N$. Démontrer que $J_n(\lambda)$ est inversible et déterminer en fonction de N et de λ la matrice N' telle que $J_n(\lambda)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} I_n + N'$

16. Calculer $(N')^n$ et en déduire que $J_n(\lambda)^{-1}$ est semblable à $J_n\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$.

Pour tout polynôme $P = P(X) \in \mathbf{C}_{n-1}[X]$ on pose

$$\begin{cases} s_1(P) = P(-X) \\ s_2(P) = P(1-X) \\ g(P) = P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

On définit ainsi trois endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ (il n'est pas demandé de le prouver).

17. Calculer s_1^2, s_2^2 et exprimer $s_1 \circ s_2$ en fonction de g et $Id_{\mathbf{C}_{n-1}[X]}$.

18. Soit P un polynôme non constant. Exprimer le degré du polynôme $g(P)$ en fonction du degré de P.

19. Déduire des questions précédentes que la matrice $J_n(1)$ est un produit de deux matrices de symétries.

On pourrait démontrer par le même type de raisonnement, et on l'admet, que la matrice $J_n(-1)$ est un produit de deux matrices de symétries.

Partie 5. Une caractérisation des matrices semblables à leur inverse.

Soit A une matrice de $\mathbf{GL}_n$ semblable à son inverse. On admet le résultat suivant : A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A (pas nécessairement distinctes) et r ainsi que les $n_i, 1 \leq i \leq r$, des entiers naturels non nuls. De plus la matrice A' est unique à l'ordre près des blocs.

20. Démontrer que A^{-1} est semblable à $\begin{pmatrix} J_{n_1}\left(\dfrac{1}{\lambda_1}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}\left(\dfrac{1}{\lambda_2}\right) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}\left(\dfrac{1}{\lambda_r}\right) \end{pmatrix}$.

21. En utilisant les résultats établis dans les parties précédentes, démontrer que A est un produit de deux matrices de symétries.