**Exercice 1** *Matrices de projections orthogonales*

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on considère le produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la formule précédente définit bien un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Soit $F = \mathrm{Vect}(1, X^2)$ et $G = \mathrm{Vect}(1, X)$.
   Déterminer les matrices dans la base canonique des projections orthogonales sur F puis sur G.
4. Déterminer le minimum de $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2 + at + b\mathrm{d}t$ lorsque $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

**Solution** (**Ex.1 –** *Matrices de projections orthogonales*)

1. Une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{\dfrac{3}{2}}X; \sqrt{\dfrac{5}{8}}(3X^2 - 1)\right)$.
2. $1 \in F$, $X^2 \in F$ et $X \in F^\perp$ vue la famille orthonormale précédente, donc $\mathcal{M}(p_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{\dfrac{3}{2}}X\right)$ est manifestement une base orthonormale de G. On peut s'en servir pour déterminer $p_G(X^2)$. Par ailleurs, on a encore $1 \in G$ et $X \in G$.
   Donc $\mathcal{M}(p_G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 2** *Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $n \geq 1$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose, pour A et B dans E, $\quad \langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^{t}A.B\right)$.

1. Montrer que
$$\forall A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle A, B\rangle = \sum_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2} a_{i,j}b_{i,j}.$$
2. Vérifier que $\langle ., .\rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle une base orthonormale ?
4. Soit $\Delta$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales. Déterminer $\Delta^\perp$.
5. Montrer que le sous-espace des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et celui des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre.
6. Soit $F = \mathrm{Vect}(I_n)$. Déterminer $F^\perp$.
7. Déterminer la projection orthogonale $p_F$ sur F, puis la projection orthogonale $p_{F^\perp}$ sur $F^\perp$.
8. Soit $J_n$ la matrice de E dont tous les coefficients valent 1. Déterminer la distance de $J_n$ à F, définie par : $d(J_n, F) = \min\limits_{A\in F} \|J_n - A\|$.

**Solution** (**Ex.2 –** *Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*)

1. Calculons explicitement $\langle A, B\rangle$ en fonction des coefficients de A et B.
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left(()\ {}^{t}AB\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} ({}^{t}A)_{i,j}(B)_{j,i}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}b_{j,i}\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{j,i}b_{j,i}$$
   ce qui est la somme voulue, quitte à permuter le nom des indices muets.
   *À retenir :*
   $\langle A, B\rangle$ est la somme des produits coefficient par coefficient des matrices A et B... exactement comme le produit canonique de $\mathbb{R}^n$.
   En particulier, $\langle A, A\rangle = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2$ est la somme des carrés des coefficients de A.
2. $\langle ., .\rangle$ est bilinéaire car la transposition et la trace le sont.
   $\langle ., .\rangle$ est symétrique car $\mathrm{Tr}\left(\left({}^{t}AB\right)\right) = \mathrm{Tr}\left({}^{t}\left({}^{t}BA\right)\right) = \mathrm{Tr}\left({}^{t}BA\right)$.
   est positif, et ne s'annule que si tous les coefficients de A sont nuls, i.e. si $A = 0$.
   $\langle ., .\rangle$ est positif et défini.
3. Comme vu plus haut, $\left\langle E_{i,j}, E_{k,\ell}\right\rangle$ est la somme des produits coefficient par coefficient des matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$.
   Si $(i, j) \neq (k, \ell)$, le seul « 1 » des matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$ n'est pas au même endroit, donc tous les produits sont nuls, donc $\left\langle E_{i,j}, E_{k,\ell}\right\rangle = 0$
   De plus, $\left\|E_{i,j}\right\|^2$ est la somme des carrés de ses coefficients, donc vaut 1.
   Ainsi la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormale.
4. Déterminer $\Delta^\perp$ (on pourra commencer par déterminer une base orthonormale de $\Delta$). La famille $(E_{i,i})_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ est une base de $\Delta$, orthonormale puisque extraite d'une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   • Première approche -

Alors, par complétion en une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Vect}\big((E_{i,j})_{i\neq j}\big)$ est le supplémentaire orthogonal de $\Delta$...
• Seconde approche -
Si $A \in \Delta^\perp$, alors $A \perp E_{i,i}$ pour tout $i$. Or $\langle A, E_{i,i}\rangle = a_{i,i}$, donc $a_{i,i} = 0$ pour tout $i$.
• Bilan, par l'une ou l'autre approche -
$\Delta^\perp$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

**Exercice 3** *Deux applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

1. Quel est le minimum de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$ pour $f$ continue strictement positive sur $[a\,;\,b]$?
2. Soit $a<b$. Montrer que, pour toute fonction $f$ continue sur $[a\,;\,b]$,
$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \frac{1}{b-a}\int_0^1 \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t.$$

**Solution** (**Ex.3 –** *Deux applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*)

1. Soit $a_1,\dots,a_n$ $n$ nombres réels.
On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On pose : $x = (a_i,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = \dfrac{1}{n}(1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n$.
Alors $\big(\langle x,y\rangle\big)^2 = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{n}\right)^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$ est le carré de la moyenne des $(a_i)_i$.
Et $\|x\|^2\,\|y\|^2 = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(n \times \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^2$ est la moyenne des carrés des $(a_i)_i$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure l'inégalité voulue... avec égalité si, et seulement si, tous les $a_i$ sont égaux entre eux.
2. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On pose : $x = \left(\dfrac{1}{\sqrt{a_i}}\right)_{1\leq i\leq n}$, $y = (\sqrt{a_i})_{1\leq i\leq n}$. $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) = \|x\|^2\,\|y\|^2 \geq \langle x,y\rangle^2 = n^2.$
Ce minorant est atteint pour $a_1 = \cdots = a_n = 1$ par exemple.
3. On munit l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a\,;\,b]$ du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Soit $f$ continue strictement positive.
On pose $x = \sqrt{f}$ et $y = 1/\sqrt{f}$.
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = \|x\|^2\,\|y\|^2 \geq \langle x,y\rangle^2 = \left(\int_a^b 1\mathrm{d}t\right)^2 = (b-a)^2$$
Ce minorant est atteint pour $f=1$ par exemple, donc c'est un minimum.
4. On munit l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a\,;\,b]$ du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Soit $f$ continue. Alors
$\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2 = \left\langle f, t\mapsto \dfrac{1}{b-a}\right\rangle^2$
$\|f\|^2\left\|t\mapsto \dfrac{1}{b-a}\right\|^2 = \dfrac{1}{(b-a)^2}\displaystyle\int_0^1 \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t$
d'où l'inégalité par Cauchy-Schwarz.

**Exercice 4** *Matrice de projection symétrique*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = A^T = A$.

1. Soit $\pi$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A :
$$\pi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \longmapsto AX.$$
Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on utilise le produit scalaire canonique
$$\langle .,.\rangle : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, (X,Y) \longmapsto \langle X,Y\rangle = X^TY.$$
Justifier que $\pi$ est une projection orthogonale.
2. Justifier que A est diagonalisable avec $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{Tr}(A)$.
3. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2$.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{\mathrm{rg}(A)}$.

**Solution** (**Ex.4 –** *Matrice de projection symétrique*)

1. $A^2 = A$ donc A est une matrice de projecteur, donc diagonalisable et semblable à $D = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-r}\end{array}\right)$. En particulier, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{Tr}(()A)$.
2. $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D) \overset{D^2=D}{=} \mathrm{Tr}\left(D^2\right) = \mathrm{Tr}\left(A^2\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tAA\right) = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2$.
3. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$ aux vecteurs :

$x = (|a_{1,1}|, \dots, |a_{n,n}|)$ et $y = (1, \dots, 1)$,

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}| = |\langle x, y\rangle| \leq \|y\| \|x\| \leq \sqrt{n^2} \times \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2} \leq n\sqrt{\mathrm{rg}(A)}.$$

**Exercice 5** *Retour de la base de Lagrange d'après E3A 2021 PC*

Soit $n \geqslant 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une famille de $n+1$ réels *deux à deux distincts*. On note $P_0$ le polynôme constant égal à 1.

On pose

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \left(P \mid Q\right) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i).$$

1. Vérifier que $\left(. \mid .\right)$ est un produit scalaire sur E.
2. Que vaut, pour P dans E, $\left(P \mid P_0\right)$ ?
3. On note $\mathcal{L} = (L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ la base de Lagrange liée aux points $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$.
   **a)** Justifier que $\mathcal{L}$ est une base orthonormale.
   **b)** En déduire, pour $P \in E$, les coordonnées de P dans $\mathcal{L}$.
   **c)** Que vaut $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i$ ?
4. Soit $H = \left\{P \in E \,|\, \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i) = 0\right\}$.
   **a)** Justifier que $H = \mathrm{Vect}(P_0)^{\perp}$.
   **b)** Soit $Q \in E$. Déterminer le projeté orthogonal de Q sur $H^{\perp}$.
   **c)** Soit $Q \in E$. Déterminer la distance de Q à H.