Exercice 1 *Détermination de rayon de convergence*

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} u_n(z)$ dans les cas suivants :

1. $u_n(z) = \dfrac{n^2+1}{3^n} z^n$
2. $u_n(z) = \mathrm{e}^{-n^2} z^n$
3. $u_n(z) = \dfrac{\ln n}{n^2} z^n$
4. $u_n(z) = n! z^n$
5. $u_n(z) = \dfrac{n^n}{n!} z^{3n}$
6. $u_n(z) = \dfrac{\ln n}{\mathrm{e}^n} z^{2n+1}$

Solution (**Ex.1 –** *Détermination de rayon de convergence*)
Je note a_n le coefficient de z^n dans $u_n(z)$.

1. $\left|\dfrac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{3n^2} |z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3} |z|$ donc $\mathrm{R} = 3$.
2. $\left|\dfrac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \mathrm{e}^{-2n-1} |z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\mathrm{R} = +\infty$.
3. $\left|\dfrac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} |z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|$ car $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln(n)}$, donc $\mathrm{R} = 1$.
4. $\left|\dfrac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = (n+1)|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\mathrm{R} = 0$ (divergence grossière dès que $z \neq 0$).
5. $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \dfrac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} |z|^3 = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n |z|^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}|z|^3$ donc $\mathrm{R} = \mathrm{e}^{-1/3}$.
6. $|u_{n+1}(z) u_n(z)| = \dfrac{\ln(n+1)\mathrm{e}^n}{\ln(n)\mathrm{e}^{n+1}} |z|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{|z|^2}{\mathrm{e}}$ donc $\mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

Exercice 2 *Rayons de convergence abstraits*

On suppose que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est $\mathrm{R} \in]0\,;+\infty[$.

Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$? Et de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} z^n$?

Solution (**Ex.2 –** *Rayons de convergence abstraits*)

• Si $|z| < \sqrt{\mathrm{R}}$, alors $\left|z^2\right| < \mathrm{R}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z^2)^n$ converge.

Si $|z| > \sqrt{\mathrm{R}}$, alors $\left|z^2\right| > \mathrm{R}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z^2)^n$ diverge.

Le rayon de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$ est $\sqrt{\mathrm{R}}$.

• Soit $z \in \mathbb{C}$ quelconque. Soit $r \in]0\,;\mathrm{R}[$.
$\dfrac{a_n z^n}{n!} = a_n r^n \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{z}{r}\right)^n = o(a_n r^n)$ car $\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{z}{r}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée.
Or $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ converge puisque $0 < r < \mathrm{R}$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} z^n$ converge absolument.

Le rayon de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} z^n$ est infini.

Exercice 3 *Indéfiniment dérivable*

Montrer que la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Solution (**Ex.3 –** *Indéfiniment dérivable*)

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)!} x^n$. Cette expression est encore valable pour $x = 0$. Donc f est la somme d'une série entière de rayon infini. Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 *Autour de* $(1+x)^\alpha$

1. Déterminer le développement en série entière sur $]-1\,;1[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On donnera une expression explicite à l'aide de factorielles de ses coefficients a_n.
2. En déduire que $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ est développable en série entière en 0 en précisant le rayon de convergence et les coefficients de ce développement en fonction des a_n.

Solution (**Ex.4 –** *Autour de* $(1+x)^\alpha$)

1. En prenant $\alpha = -1/2$ et $-x^2 \to x$ dans le DSE de $(1+x)^\alpha$:
   $\forall x \in]-1\,;\,1[,\quad \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$ (Rappel : produit des pairs de 2 à $2n$: $2^n n!$, produit des impairs de 1 à $2n-1$: $\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$...)
   Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ et $a_{2n+1} = 0$.
2. $\forall x \in]-1\,;\,1[, f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec
   $b_0 = a_0$ et $\forall n \geq 1, b_n = a_n + a_{n-1} = \begin{cases} a_n & \text{si } n \text{ pair} \\ a_{n-1} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$, cette dernière écriture étant valable pour $n = 0$...

Exercice 5 *De « n » à « 2n »*

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(2n+1)!}$.
2. Pour $x \in]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$, on note $\mathrm{S}(x)$ la somme d cette série.
   a) Calculer $\mathrm{S}(0)$.
   b) Pour $x \in]0\,;\,\mathrm{R}[$, calculer $\mathrm{S}(x)$ en observant que $x^n = \left(\sqrt{x}\right)^{2n}$.
   c) Pour $x \in]-\mathrm{R}\,;\,0[$, calculer $\mathrm{S}(x)$ en observant que $x^n = (-1)^n\left(\sqrt{-x}\right)^{2n}$.

Solution (**Ex.5 –** *De « n » à « 2n »*)

$\forall x \neq 0, \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \dfrac{|x|}{(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la série converge pour tout x et $\mathrm{R} = +\infty$.

Pour $x = 0$, $f(x) = 1$.

Pour $x > 0$: $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt{x}^{2n}}{(2n+1)!} \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\mathrm{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Pour $x < 0$: $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n\sqrt{-x}^{2n}}{(2n+1)!} \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n\sqrt{-x}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$

Exercice 6 *Convergence et valeur au bord du domaine*

1. Montrer l'existence de $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0\,;\,1],\quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.
   a) Justifier l'existence, pour $x \in [0\,;\,1]$, de $\mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
   b) Que vaut, pour $x \in [0\,;\,1[$, $\mathrm{S}(x)$?
   c) Montrer que la série converge uniformément sur $[0\,;\,1]$.
   d) En déduire la valeur de S.

Solution (**Ex.6 –** *Convergence et valeur au bord du domaine*)

1. Théorème de Leibniz : $\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)_n$ est décroissante de limite nulle.
2. a) Sur $[0\,;\,1[$, S.E. de Arctan. En 1, voir 1).
   b) S.E. de R.C. 1 : $\forall x \in [0\,;\,1[, \mathrm{S}(x) = \mathrm{Arctan}(x)$.
   c) Leibniz : $\forall x \in [0\,;\,1], |\mathrm{R}_n(x)| \leq \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \dfrac{1}{2n+3}$. Donc $\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[0\,;\,1]} \leq \dfrac{1}{2n+3}$.
   d) La convergence de $\displaystyle\sum_n f_n$ est uniforme sur $[0\,;\,1]$ donc la somme est continue sur $[0\,;\,1]$.
3. Par continuité de S et Arctan en 1, $\mathrm{S} = \mathrm{S}(1) = \displaystyle\lim_{x\to1^-} \mathrm{S}(x) = \lim_{x\to1^-} \mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{4}$.
   On peut aussi invoquer le théorème de la double limite sur $[0\,;\,1[$ puisque la convergence est uniforme.

Exercice 7 *Différence de S.E.*

Soit $f : z \mapsto \dfrac{1}{z^2-3z+2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est développable en série entière, en précisant les coefficients et le rayon de convergence du développement obtenu.

Solution (**Ex.7 –** *Différence de S.E.*)

1. $z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2) = (1-z)(2-z)$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$.
2. $\forall z \in \mathcal{D}_f$,
   $\dfrac{1}{z^2-3z+2} = \dfrac{1}{1-z} - \dfrac{1}{2-z} = \dfrac{1}{1-z} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-z/2}$. Pour z tel que $|z/2| < 1$ et $|z| < 1$, c'est-à-dire $|z| < 1$, par convergence de la série géométrique,

$$\forall z \in \mathcal{D}(0,1), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}z^n$$

f étant la somme de deux séries entières de rayons distincts 1 et 2, le rayon de convergence de cette somme est $\min(1,2) = 1$. Sinon, on peut réveiller M. D'Alembert pour s'en convaincre.

Exercice 8 *Expression fonctionnelle d'une S.E.*

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n}{(n+1)!}x^n$.

   On note $f :]-R\,;\,R[\to \mathbb{R}$ sa somme.
2. Calculer f
   a) en écrivant $\dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{a}{n!} - \dfrac{b}{(n+1)!}$ où a et b sont deux constantes réelles à déterminer ;
   b) en écrivant $f(x) = xg(x)$ et en explicitant g.

Solution (**Ex.8 –** *Expression fonctionnelle d'une S.E.*)

1. $\forall z \neq 0, \left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \dfrac{(n+1)}{(n+2)n}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la série converge pour tout z et $R = +\infty$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{n+1-1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$

   $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)!}z^n$ ont un rayon de convergence infini (série exponentielle).

   Pour $z \neq 0$,

   $$S(z) = e^z - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = e^z - \frac{1}{z}\left(e^z - 1\right).$$

   Pour $z = 0$, $S(z) = 0$.

Exercice 9 *En commençant par une dérivation*

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

et préciser le rayon de convergence R.

Indication : on pourra commencer par dériver f…

Solution (**Ex.9 –** *En commençant par une dérivation*)

Commençons par dériver f qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par les théorèmes classiques.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\dfrac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{1 + \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2 + (1-x^2)^2} = \frac{-2x}{1+x^4}$$

Or par la série géométrique de rayon 1, et comme $\left|-x^4\right| < 1 \iff |x| < 1$, on peut écrire, toujours avec un rayon 1 :

$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^4)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{4n}.$$

Donc pour tout $x \in]-1\,;\,1[$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}2(-1)^{n+1}x^{4n+1}$.

En primitivant, ce qui conserve le rayon,

$\forall x \in]-1\,;\,1[$,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{4n+2}x^{4n+2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{4n+1}.$$

Exercice 10 *En commençant par une primitivation*

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{(2x+3)^2}$$

et préciser le rayon de convergence R.

Indication : on pourra commencer par primitiver f…

Solution (**Ex.10 –** *En commençant par une primitivation*)

Notons que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3/2\}$, donc le rayon ne pourra excéder 3/2.

Commençons par primitiver f (une primitive suffit) : $\forall x \in \mathcal{D}_f$,

$F(x) = \dfrac{-1}{2} \times \dfrac{1}{2x+3} = \dfrac{-1}{6} \times \dfrac{1}{1+2x/3}$.

En utilisant la série géométrique, avec $|2x/3| < 1 \iff |x| < 3/2$,

$\forall x \in]-3/2\,;\,3/2[$, $F(x) = \dfrac{-1}{6}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n-1}}{3^{n+1}}x^n.$

Alors, par dérivation terme à terme qui conserve le rayon,

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{n-1}}{3^{n+1}} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n (n+1)}{3^{n+2}} x^n$ avec un rayon de convergence $R = \frac{3}{2}$.

Méthodes alternatives :

– on peut partir du développement de $\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$,

avec $\alpha = -2$, $a_n = \frac{(-1)^n (n+1)!}{n!} = (-1)^n (n+1)$, puis pour $|x| < 3/2$

$\frac{1}{(2x+3)^2} = \frac{1}{9((2/3)x+1)^2} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1)\left(\frac{2}{3}x\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 2^n}{3^{n+2}} x^n$

– on peut envisager le produit de Cauchy $\frac{1}{2x+3} \times \frac{1}{2x+3}$...

Exercice 11 *En formant une équation différentielle*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t.$$

1. Justifier que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer son développement en série entière au voisinage de 0.
   Indication : on pourra commencer par former une équation différentielle dont f est solution...

Solution (**Ex.11 –** *En formant une équation différentielle*)

1. $x \mapsto e^{-x^2}$ est développable en série entière de rayon infini en appliquant la série exponentielle à $-x^2$.
   $x \mapsto e^{x^2}$ est développable en série entière de rayon infini en appliquant la série exponentielle à x^2, donc sa primitive nulle en 0 aussi.
   Donc f est développable en série entière de rayon infini comme produit de série qui le sont.
2. f est par conséquent $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Commençons par dériver f.
   $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t + e^{-x^2} e^{x^2} = -2xf(x) + 1$.
   Utilisons cette équation différentielle pour développer f.
   J'écris :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$
   Alors :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = -2x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 1$$
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 1$$
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 1$$
   Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul et, avec la valeur de f en 0,
   $$\begin{cases} a_0 = f(0) = 0, \\ a_1 = 1, \\ \forall n \geq 1, (n+1)a_{n+1} = -2a_{n-1}. \end{cases}$$
   Ceci détermine la suite (a_n) de façon unique :
   $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{-2}{n+2} a_n$.
   On a immédiatement :
   $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0$
   $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = \frac{-2}{2n+1} a_{2n-1} = \frac{(-2)^2}{(2n+1)(2n-1)} a_{2n-3} = \ldots$
   $a_{2n+1} = \frac{(-2)^n}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3.1} a_1 = \frac{(-2)^n 2^n (n!)}{(2n+1)!}$
   Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Exercice 12 *Calcul d'une somme de série*

L'objectif de cet exercice est de calculer

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n}$$

de deux façons.

1. Justifier l'existence de S.
2. *Première méthode*
   a) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_n \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1}.$$

b) Conclure.

3. *Seconde méthode*

a) Rappeler le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_n \frac{1}{n} x^n.$$

b) Déterminer S en séparant les termes de rangs pairs et les termes de rangs impairs de cette somme.

Solution (**Ex.12 –** *Calcul d'une somme de série*)

1. Par exemple, $\dfrac{1}{(2n+1)4^n} = o\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)$, t.g. d'une série géométrique convergente.

2. $\mathrm{RC} = 1$, $\forall x \in \,]-1\,;\,1[$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$

   Par primitivation de série entière :

   $\forall x \in \,]-1\,;\,1[$, $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$,

   donc $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } x \in \,]-1\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   Pris en $x = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{S} = \ln(3)$.

3. Pour tout $x \in \,]-1\,;\,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n} x^n + \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n} x^n$ conduit à

   $-\ln(1-x) = -\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2) + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1}$ d'où en $x = 1/2$

   $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$, donc

   $\mathrm{S} = 2\ln(2) + \ln(3) - \ln(4) = \ln(3)$.

Exercice 13 *Égalité entre une intégrale impropre et une somme de série*

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solution (**Ex.13 –** *Égalité entre une intégrale impropre et une somme de série*)

Notons $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ -1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

Comme $\ln(1-t) \underset{t\to 0}{\sim} -t$, f est continue en 0... et f est intégrable sur $[0\,;\,1]$.

$\forall t \in [0\,;\,1[$, $\dfrac{\ln(1-t)}{t} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} t^n$ et en primitivant terme à terme :

$\forall x \in [0\,;\,1[$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n$.

Quand $x \to 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$.

Reste à établir que lorsque $x \to 1$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = g(1)$, i.e.$g$ est continue en 1.

Or $\left\|x \mapsto \dfrac{x^n}{n^2}\right\|_{\infty,[0\,;\,1]} = \dfrac{1}{n^2}$, donc la série de fonctions définissant g converge normalement donc uniformément, et comme chaque $x \mapsto \dfrac{x^n}{n^2}$ est continue, donc g est continue sur $[0\,;\,1]$. Donc g est continue en 1. Gagné.

Exercice 14 *Application à la résolution d'équations différentielles*

Pour les équations différentielles suivantes, on demande de déterminer les solutions développables en séries entières au voisinage de 0 en précisant le rayon de convergence des séries obtenues :

1. (E_0) $\quad x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$;
2. (E_1) $\quad (x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0$;
3. (E_2) $\quad y' - 2xy = 2x^2 - 2x - 1$.

Solution (**Ex.14 –** *Application à la résolution d'équations différentielles*)

1. L'ensemble des solutions DSE au voisinage de 0 est

$$\left\{ f : \,]-\infty\,;\,+\infty[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + bx^2 + \frac{1}{2}x^3, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. En posant $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ pour $x\in\,]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$, y est solution de (E_1) ssi
$\forall n\in\mathbb{N}, [n(n-1)+4n+2]a_n-(n+1)(n+2)a_{n+2}=0$, i.e. $a_{n+2}=a_n$, donc
ssi $f(x)=a_0\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}+a_1\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n+1}=\dfrac{a_0+a_1x}{1-x^2}$.
Le rayon de convergence de cette série est $\mathrm{R}=1$.
L'ensemble des solutions DSE au voisinage de 0 est
$$\left\{f:\,]-1\,;\,1[\,\to\mathbb{R}, x\mapsto\frac{ax+b}{1-x^2}, (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

3. $y:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ vérifie (E_2) sur $]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$ ssi
$\forall x\in\,]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[, \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(-2a_{n-1})x^n=2x^2-2x+1$ et par unicité des coefficients ssi
$$\begin{cases}a_1=-1\\ a_2=a_0-1\\ 3a_3=2a_1+2\\ \forall n\geqslant 3, a_{n+1}=\dfrac{2}{n+1}a_{n-1}\end{cases}$$
ssi
$$\begin{cases}a_0=a_2+1\\ a_1=-1\\ \forall p\geqslant 1, a_{2p+1}=0\\ \forall p\geqslant 1, a_{2p}=\dfrac{1}{p!}a_2\end{cases}$$
ssi $y:x\mapsto a_2\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{p!}x^{2p}-x+1=a_2\mathrm{e}^{x^2}-x+1$.
Le rayon de convergence de cette série étant $+\infty$, l'ensemble des solutions DSE est
$$\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto a\mathrm{e}^{x^2}-x+1, a\in\mathbb{R}\right\}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 15}}$ *Étude au bord du domaine*
Pour x réel, on pose sous réserve d'existence
$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. **a)** f est-elle définie en -1 ?
   b) Montrer que la série définissant f converge uniformément sur $[-1\,;\,0]$.
   c) f est-elle continue sur $[-1\,;\,1[$?
   On se propose de déterminer la limite de f en 1 par deux méthodes.
3. *Première méthode –*
   a) Comparer, pour tout $x\in[\,0\,;\,1[$, $\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ et $\dfrac{x^n}{n}$.
   b) En déduire la limite de f en 1.
4. *Seconde méthode –*
   a) Justifier que f est dérivable sur $[\,0\,;\,-1[$. Quelle est sa variation ?
   b) En déduire la limite de f en 1.

Solution (**Ex.15 –** *Étude au bord du domaine*)
Pour x réel, on pose sous réserve d'existence
$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

1. $\mathrm{R}=1$.
2. **a)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge en appliquant le théorème de Leibniz car $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante de limite nulle : f est définie en -1.
   b) Soit $x\in[-1\,;\,0]$. $\mathrm{R_N}(x)=\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(-x)^n}{\sqrt{n}}$.
   - Si $x=0$, $\left(\dfrac{(-x)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante, de limite nulle... car c'est la suite nulle.
   - Si $x\in[-1\,;\,0[$, $(u_n)=\left(\dfrac{(-x)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est strictement positive, décroissante car $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=(-x)\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}<1$, de limite nulle car $0<u_n\leq 1/\sqrt{n}$.

   Par le théorème de Leibniz : $|\mathrm{R}_n(x)|\leq\left|\dfrac{(-x)^{\mathrm{N}+1}}{\sqrt{\mathrm{N}+1}}\right|\leq\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{N}+1}}$.
   Ainsi : $\forall x\in[-1\,;\,0], |\mathrm{R_N}(x)|\leq\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{N}+1}}$, donc $\|\mathrm{R_N}\|_{\infty,[-1\,;\,0]}\leq\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{N}+1}}$, et $\|\mathrm{R_N}\|_{\infty,[-1\,;\,0]}\xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{}0$ par encadrement. La convergence est uniforme sur $[-1\,;\,1]$.

c) f est somme d'une série entière de domaine de convergence $]-1\,;\,1[$ donc est $\mathcal{C}^\infty$, donc continue, sur $]-1\,;\,1[$.

Par convergence uniforme sur $[-1\,;\,0]$, puisque chaque $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ est continue, f est continue sur $[-1\,;\,1]$.

Donc f est continue sur $[-1\,;\,1[$.

On se propose de déterminer la limite de f en 1 par deux méthodes.

3. *Première méthode –*

a) $\forall x \in [0\,;\,1[,\ \dfrac{x^n}{\sqrt{n}} \geq \dfrac{x^n}{n}$.

b) On en déduit par sommation : $\forall x \in [0\,;\,-1[,\quad f(x) \geq -\ln(1-x)$. Or : $-\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$. Par comparaison : $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$.

4. *Seconde méthode –*

a) f est la somme d'une série entière sur $]-1\,;\,1[$ donc f est $\mathcal{C}^\infty$ donc dérivable sur cet intervalle, et on peut dériver terme à terme :

$\forall x \in [0\,;\,1[, f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{n+1}) x^n \geq 0$. f est croissante dur $[0\,;\,1[$.

b) Puisque f est croissante, soit elle est majorée et converge en 1, soit elle ne l'est pas et diverge vers $+\infty$ en 1.

Supposons f majorée par une constante M.

$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0\,;\,1[, \displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \leq \mathrm{M}$.

En passant à la limite lorsque $x \to 1^-$: $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \mathrm{M}$. Ceci est impossible car la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, vers $+\infty$ car son terme général est positif.

Donc f n'est pas majorée, donc diverge vers $+\infty$ en 1.