

Etude des caractéristiques d'un matériau biosourcé: le Kairlin (R)

CCIMP PC 2023
Modélisation

Partie II Étude des performances thermiques

Q1) On suppose que les autres dimensions (soient $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$) sont très grandes devant l'épaisseur, cela permet de négliger les effets de bord.

Q2) $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$ ce qui donne à 1D: $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Q3) $T(t > 0, x = 0) = T_{int}$ $T(t, x = L) = T_{ext}$
 $T(t = 0, x > 0) = T_{ext}$ $T(t = 0, x = 0) = T_{int}$

Q4) En régime permanent stationnaire $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ donc $T(x) = Ax + B$.
 d'où $T(x) = \frac{T_{ext} - T_{int}}{L} x + T_{int}$ avec les limites.

Q5) $R_{th} = \frac{\Delta T}{\phi}$ C'est le rapport entre l'écart de température de part et d'autre du mur et le flux qui le traverse.



ici $\phi = j_{th} \times S = -\lambda \frac{dT}{dx} \times S = \frac{T_{int} - T_{ext}}{L} \times \lambda \times S = \frac{\Delta T}{L} \lambda \times S$

d'où $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$ où

Ainsi, la résistance thermique surfacique est simplement $r_{th} = \frac{L}{\lambda_{isolant}} = S \times R_{th}$

Q6) $L = r_{th} \times \lambda_{isolant} = 12 \text{ cm}$

en $\text{m}^2 \text{K} \text{W}^{-1} \times \text{W} \text{K}^{-1} \text{m}^{-1} = \text{m}$ c'est homogène.

Q7) $\frac{\partial T}{\partial t} = h_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ d'après Q2 $h_{th} = \frac{\lambda_{isolant}}{\rho c_p}$

Q8) Il y a $N \times X$ intervalles $dx = \frac{L}{N \times X}$

$x_i = i \frac{L}{N \times X}$

Q9) a) $T(t + dt, x) = T(t, x) + \frac{\partial T}{\partial t} dt$

b) $T(t, x - dx) = T(t, x) + \frac{\partial T}{\partial x} (-dx) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{(-dx)^2}{2}$

c) $T(t, x + dx) = T(t, x) + \frac{\partial T}{\partial x} (dx) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2}$

Q10) On ajoute b) et c):

$$T(t, x-dx) + T(t, x+dx) = 2T(t, x) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx^2$$

ou encore
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(t, x-dx) + T(t, x+dx) - 2T(t, x)}{dx^2}$$

Q11) a) dérivé
$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

Q10) dérivé
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{dx^2} [T_{i-1}^n + T_{i+1}^n - 2T_i^n]$$

Q12) On reprend l'équation de Q7: $\frac{\partial T}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ et on utilise Q11.

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{dt} = k_x \frac{1}{dx^2} [T_{i-1}^n + T_{i+1}^n - 2T_i^n]$$

d'où
$$T_i^{n+1} = T_i^n + k_x \frac{dt}{dx^2} [T_{i-1}^n + T_{i+1}^n - 2T_i^n] \quad (2) \text{ C'est l'équation de l'énoncé.}$$

Q13) $K = \text{Lambda} / C_p / \rho h_a$

Q14) L'équation 2 n'est valable que pour les points qui ont un point à gauche et un point à droite donc pas aux limites ($x=0$ et $x=L$). Mais de toute façon, on connaît T en $x=0$ et $x=L$ à tout instant donc on ne va pas les recalculer

Q15) $dx = L / (N_x + 1)$
 $dt = t_{\text{max}} / (N_t + 1)$

Q19) Le régime permanent est atteint à 18000s car $T(x)$ est alors une fonction affine comme prévu à Q4.

~~On peut aussi écrire $dx = [i \times \frac{L}{N_x}]$ for i in range $(0, N_x + 1)$ et passer pour dt~~

Q16) $\text{Temp}[0, 0] = T_{\text{int}}$
 for i in range $(1, N_x + 1)$:
 $\text{Temp}[0, i] = T_{\text{ext}}$
 for n in range $(1, N_t + 1)$:
 $\text{Temp}[n, 0] = T_{\text{int}}$
 $\text{Temp}[n, N_x] = T_{\text{ext}}$

Q17)
 for n in range $(1, N_t + 1)$:
 for i in range $(1, N_x)$ ~~pas le 1er~~ ^{mi le 1er} ~~mi le 2nd~~ ^{mi le 2nd} ~~point~~ ^{point}:
 $a = \text{Temp}(n, i+1) + \text{Temp}(n, i-1) - 2 \times \text{Temp}(n, i)$
 $b = a \times K \times dt / (dx^2)$
 return $\text{Temp}(n, i) + b$.

Q18) Les points s'éloignent de L pour aller vers $\searrow$ donc:

(3) $\leftrightarrow 0s$ (1) $\leftrightarrow 6000s$ (4) $\leftrightarrow 12000s$ (2) $\leftrightarrow 18000s$

Étude des caractéristiques d'un matériau viscoélastique, le Kairlin®

Partie III: Étude des performances acoustiques

CCMP PC 2023
Modélisation

Q20) $\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$ (l'équation de conservation de la masse)

s'écrit ici $\underbrace{\text{div}(\rho_0 \vec{v}_1)}_{\rho_0 \text{ uniforme}} + \underbrace{\text{div}(\rho_1 \vec{v}_1)}_{\text{négligé car infiniment petit d'ordre 2}} + \underbrace{\frac{\partial \rho_0}{\partial t}}_0 + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0$
 0 car ρ_0 est ~~uniforme~~ constant.

d'où $\boxed{\rho_0 \text{div}(\vec{v}_1) + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0}$ et à 1D $\boxed{\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0}$ (M)

Q21) $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad}(p)$ devient $(\rho_0 + \rho_1) \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}_1 \cdot \text{grad}) \vec{v}_1}_{\text{négligé car infiniment petit d'ordre 2}} \right) = -\frac{\partial \rho_0}{\partial x} - \frac{\partial \rho_1}{\partial x}$

d'où $\boxed{\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_1}{\partial x}}$ (E)
 négligé car infiniment petit d'ordre 2 | négligé car infiniment petit d'ordre 2 | 0 car ρ_0 est uniforme

Q22) $\boxed{p_1 = \chi_s \rho_0 \dot{v}_1}$ (T) (aucune démo demandée)

Q23) (M) et (T) donnent: Rmq: j'ai utilisé ρ_0 et ρ_1 aux questions 20 et 21 au lieu de ρ , qui ne permettrait pas de linéariser $\frac{1}{\rho}$; pareil pour p .

$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\chi_s \rho_0 \frac{\partial p_1}{\partial x}$ (T')

Je dérive (T') par rapport à t

(E) par rapport à x

$\rho_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$

$\rho_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = -\chi_s \rho_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$

Or $\frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t}$ d'après le théorème de Schwarz donc $\boxed{\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \chi_s \rho_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}}$

C'est bien une équation de d'Alembert avec $\boxed{c^2 = \frac{1}{\chi_s \rho_0}}$

Q24) $\boxed{\rho_0 \times c \text{ est en } \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}}$
 $\boxed{p/v \text{ est en } \text{Pa} / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}}$

C'est bien homogène

Q25) $\boxed{v(x,t) = \frac{1}{2} f(t - \frac{x}{c}) - \frac{1}{2} g(t + \frac{x}{c})}$
 ↑ car onde directe ↑ car onde rétrograde

Q26) Onde incidente (indice i) $p_i(x,t) = p_1 \cos(\omega t - kx)$
 $v_i(x,t) = \frac{1}{2} p_1 \cos(\omega t - kx)$

Onde réfléchie (indice 2)

$$p_r(x,t) = p_{r0} \cos(\omega t + kx + \varphi_r)$$

$$v_r(x,t) = -\frac{1}{Z} p_{r0} \cos(\omega t + kx + \varphi_r)$$

Onde transmise (indice 1)

$$p_t(x,t) = p_{t0} \cos(\omega t - kx + \varphi_t)$$

$$v_t(x,t) = \frac{1}{Z} p_{t0} \cos(\omega t - kx + \varphi_t)$$

φ_r et φ_t existent car il peut y avoir un déphasage entre les ondes.

On fait attention au signe entre ωt et kx et au signe entre p et v .

Q27) Dans l'énoncé, c'est écrit p_r et p_t mais j'utilise p_{r0} et p_{t0} pour les amplitudes des ondes

a) $v_{\text{gauche milieu}}(0^-, t) = v_{\text{droite milieu 2}}(0^+, t)$

d'où en $x=0$

$$\frac{1}{Z} p_1 - \frac{1}{Z} p_{r0} = \frac{1}{Z} p_{t1}$$

b) On applique le PFD à un élément de plaque de surface dS en référentiel galiléen.

BdF: p son poids

$\times$ la réaction du reste de la plaque

$\times$ les forces de pression à droite et à gauche

$$m\ddot{a} = \sum \vec{F}$$

$$-p_t(0^+, t) dS \vec{u}_x + [p_i(0^-, t) + p_r(0^-, t)] dS \vec{u}_x$$

$$d'où \underbrace{\rho dS \ddot{x}}_{\text{c'est la même}} \vec{u}_x = [p_i(0^-, t) + p_r(0^-, t) - p_t(0^+, t)] dS \vec{u}_x + \vec{0}$$

Les autres forces sont perpendiculaires au mouvement, donc se compensent

$$\ddot{x} = \dot{v}_{\text{milieu 1}}(0^-, t) = \dot{v}_{\text{milieu 2}}(0^+, t)$$

d'où ~~$\frac{1}{Z}$~~ Il y a visiblement dans la réponse du ~~prof~~ i complexe donc il faut tout passer en notation complexe

Je reprends : onde incidente: $\underline{p}_i(x,t) = p_1 \exp(i(\omega t - kx))$

$$\underline{v}_i(x,t) = \frac{1}{Z} p_1 \exp(i(\omega t - kx))$$

onde réfléchie

$$\underline{p}_r(x,t) = p_{r0} \exp(i(\omega t + kx))$$

$$\underline{v}_r(x,t) = -\frac{1}{Z} p_{r0} \exp(i(\omega t + kx))$$

onde transmise

$$\underline{p}_t(x,t) = p_{t0} \exp(i(\omega t - kx))$$

$$\underline{v}_t(x,t) = \frac{1}{Z} p_{t0} \exp(i(\omega t - kx))$$

Continuité de v :

$$r_1 - r_0 = r_{t0} \quad L_1$$

PFD à la plaque, avec $\underline{v}_t = \frac{\partial \underline{v}_t}{\partial t} = i\omega \underline{v}_t = + \frac{i\omega}{z} r_{t0} e^{i(\omega t - kx)}$.

$$dS \rho \frac{i\omega}{z} r_{t0} e^{i\omega t} = dS (r_1 + r_0 - r_{t0}) e^{i\omega t}$$

$$\text{d'où} \quad r_1 + r_0 = r_{t0} \left(1 + \frac{i\omega \rho}{z}\right) \quad L_2$$

$$L_1 + L_2 \text{ donne} \quad 2r_1 = r_{t0} \left(2 + \frac{i\omega \rho}{z}\right)$$

$$\text{d'où} \quad \frac{r_{t0}}{r_1} = \underline{t} = \frac{2}{2 + \frac{i\omega \rho}{z}} = \boxed{\frac{2z}{2z + i\omega \rho} = \underline{t}}$$

$$\text{et} \quad r = \frac{r_{r0}}{r_1} = 1 - \underline{t} \quad \text{d'après } L_1$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\underline{r} = \frac{i\omega \rho}{2z + i\omega \rho}}$$

$$\begin{aligned} Q28) \quad T &= \frac{\langle r_{t0}^2 \rangle}{\langle r_i^2 \rangle} = \frac{\frac{1}{2} \text{Re}(r_{t0} \cdot \underline{v}_t^*)}{\frac{1}{2} \text{Re}(r_i \cdot \underline{v}_i^*)} \\ &= \frac{\text{Re}(|\underline{t}|^2 r_{i0}^2 e^{i(\omega t - kx)} - i(\omega t - kx)})}{\text{Re}(r_{i0}^2)} \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{T = \frac{|\underline{t}|^2}{(2z)^2}} \quad \boxed{T = \frac{(2z)^2}{(2z)^2 + (\omega \rho)^2}}$$

$$\boxed{T_{dB} = 10 \log \left(\frac{4z^2}{4z^2 + (\omega \rho)^2} \right)}$$

R_{mp} z est en $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$ (cf Q24)

$\omega \rho$ est en $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$ (par la même raison).

Q29) frequency = []

I-emettem = []

I-receptem = []

for lu in Fichier:

ligne = lu.split("\t")

frequency.append(ligne[0])

I-emettem.append(ligne[2])

I-receptem.append(ligne[3])

tab_freq = np.array(frequency)

tab_emett = np.array(I-emettem)

tab_recp = np.array(I-receptem)

pff, c'est dans le dossier

Q30) numpy permet de faire des calculs avec les tableaux.

~~Gain~~ Gain-dB = $10 \times \text{np}.\log_{10}(\text{Tab-emett} / \text{Tab-recep})$

Q31) plt.plot(Tab-freq, Gain-dB, '+', label='points exp.')

plt.legend()

plt.xlabel('fréquence [Hz]')

plt.ylabel('Indice d'amortissement acoustique [dB]')

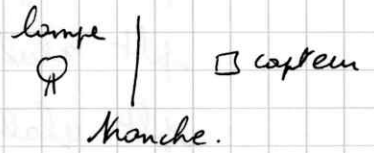
plt.title('Evolution du gain en fonction de la fréquence')

Etude des caractéristiques d'un matériau bio-sourcé, le Kairlin ®

CCINP PC 2023
modélisation

Q32) Il faut une transmittance très grande et l'autre très petite
donc entre 300 et 350 nm, la lumière qui traverse le PLA est transmise à 30%
et à travers le lin 1 à 2%.

Je suppose que la photographie est prise en transmission.
donc les zones blanches sont le PLA et les zones
sombres le lin.



Q33) def Seuil(x):

$V_{seuil} = 100$

if $x > V_{seuil}$:

return 255

else:

return 0

Q34) for i in nb_lignes:

Q35) for j in nb_colonnes:

image_sortie[i,j] = Seuil(image_sortie[i,j])

$N_{pixel} = nb_lignes * nb_colonnes$

$V_{moyenne} += image_sortie[i,j]$

c'est pas la moyenne, c'est
le total sinon on
divise plusieurs fois par N-pixel.

~~$Pourcentage = (V_{moyenne} / N_{pixel}) / 255 * 100$~~

la vraie moyenne

$V_{moyenne} = V_{moyenne} / N_{pixel}$

c'est la vraie moyenne. on ne fait
qu'une division

$Pourcentage_PLA = V_{moyenne} / 255 * 100$

%age de PLA claire

$Pourcentage = 100 - Pourcentage_PLA$

%age de fibre foncée.

Q37) Pour la surface S, il y a $x = 58,31\%$ de lin soit xS de lin

Pour la ligne L, il y a $\sqrt{x} L$ de lin et pour le volume V, $x^{3/2} \times V$ de lin.

Le pourcentage en volume est $x^{3/2}$ et non x.

On note m_{tot} la masse totale, m_{lin} celle de lin et m_{PLA} celle de PLA
pareil pour le volume

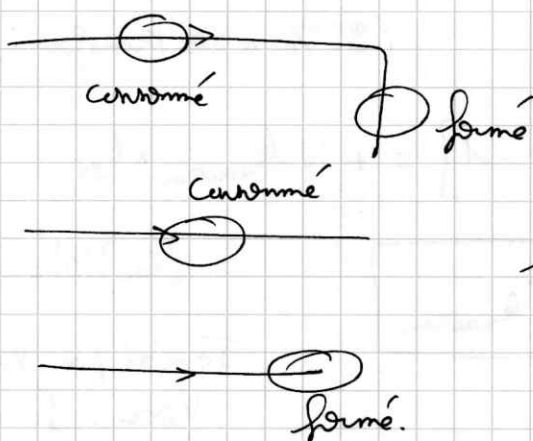
$$V_{\text{rot}} = V_{\text{lin}} + V_{\text{PLA}} \quad \text{ou} \quad x^{3/2} V = V_{\text{lin}} \quad \text{et} \quad (1-x^{3/2}) V = V_{\text{PLA}}$$

$$m_{\text{rot}} = \underbrace{\rho_{\text{lin}} V_{\text{lin}}}_{m_{\text{lin}}} + \underbrace{\rho_{\text{PLA}} V_{\text{PLA}}}_{m_{\text{PLA}}} = (x^{3/2} \rho_{\text{lin}} + (1-x^{3/2}) \rho_{\text{PLA}}) V$$

d'où $m_{\text{lin}} = 623 \text{ kg}$
 $m_{\text{rot}} = 1,32 \cdot 10^3 \text{ kg}$

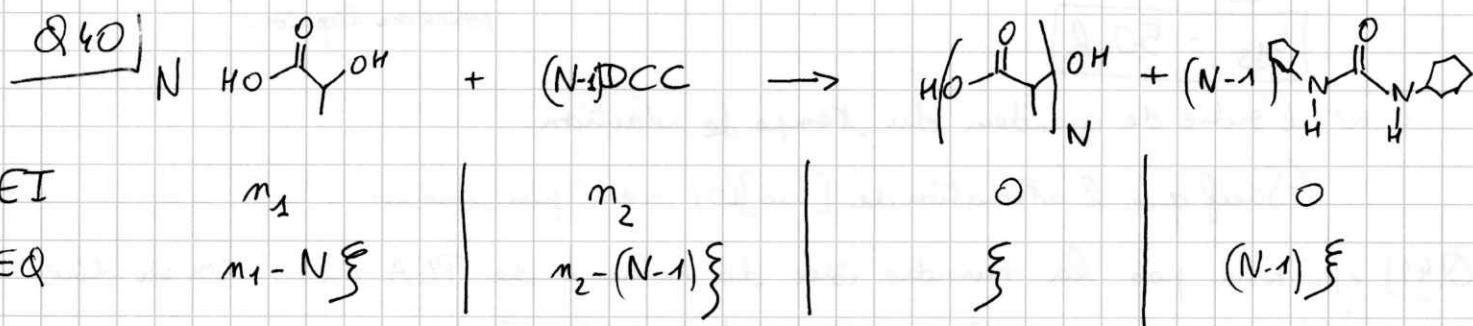
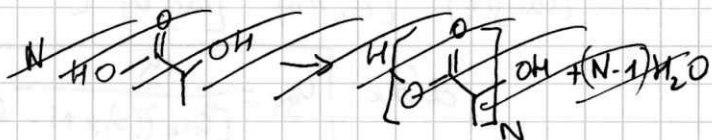
$m_{\text{PLA}} = 633 \text{ kg}$
 $\rho = 1,32 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} = 1,32 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Q38] C'est un catalyseur car il est consommé et formé en quantités égales



Q39] cf Doc Réponse

Q40



C'est écrit d'attendre 42h. la réaction est lente.

On met $V_{\text{AL}} = 150 \text{ mL}$ d'acide lactique pur

soit $n_{\text{AL}} = \frac{V_{\text{AL}} \times \rho_{\text{AL}}}{M_{\text{AL}}} = 2,1 \text{ mol}$

(Comme c'est la seule donnée, je suppose que c'est le réactif limitant.)

Heu, si $N=10$ $M=738 \text{ g/mol}$.

Je prends 738 g/mol .

d'où $n_{\text{PLA}} = \frac{m}{M} = \frac{1,22}{738} = 1,65 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$

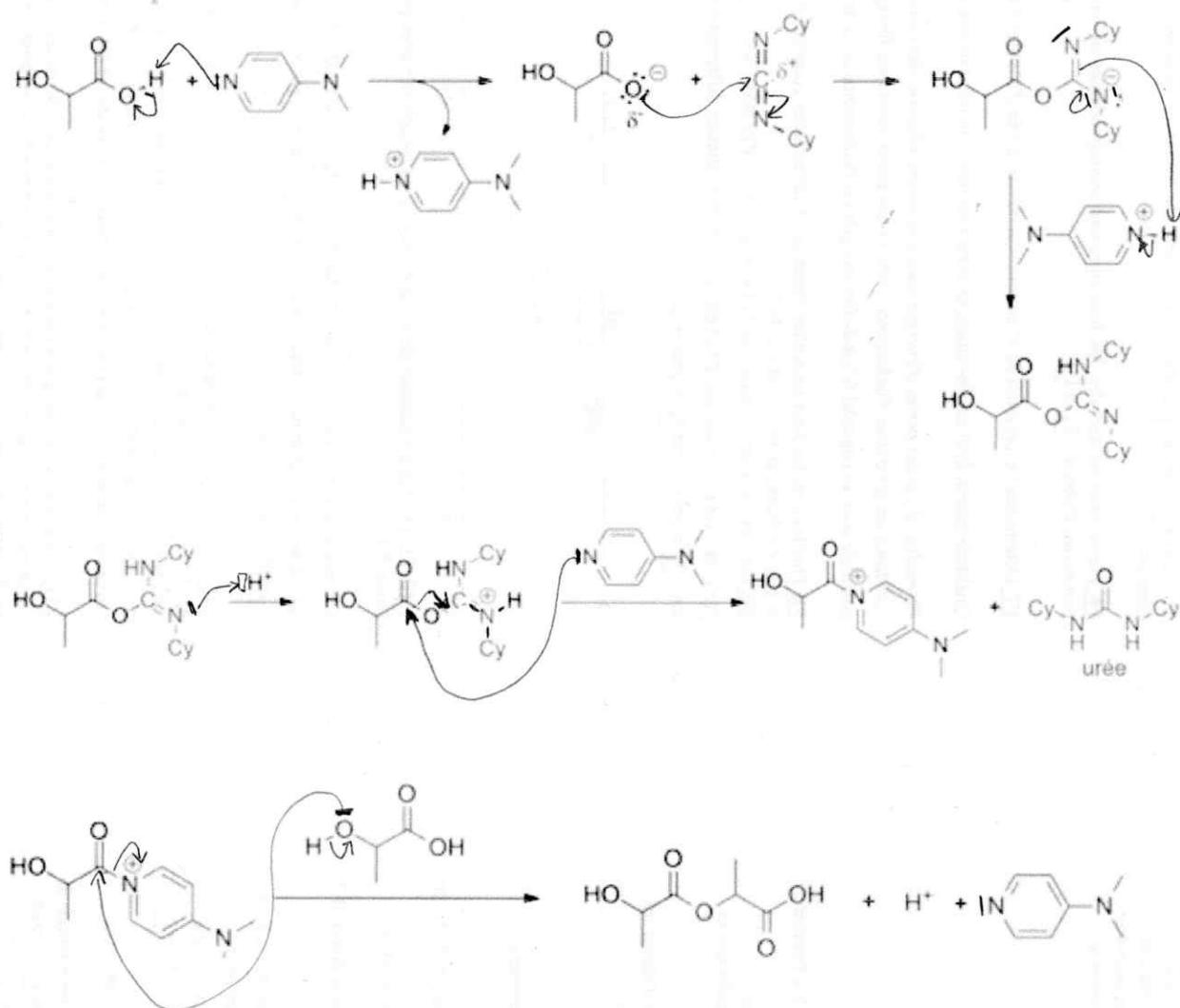
$n_{\text{PLA}} = \frac{m_{\text{PLA}}}{M} = \frac{m_{\text{AL}}}{10} = 0,21 \text{ mol}$

le rendement est de 0,73%.

C'est très peu.

Q41] $v = k_{\text{réaction}} [\text{lac}]^2 = -\frac{1}{N} \frac{d[\text{lac}]}{dt}$ soit $\frac{d[\text{lac}]}{dt} = -N k_{\text{réaction}} [\text{lac}]^2$ (4)

Q39 – Mécanisme réactionnel



FIN

Q42) $\frac{d[lac]}{dt} = -N k_{reaction} [lac]^2$. On sépare les variables.

$$\int_{initial}^t \frac{d[lac]}{[lac]^2} = -N k_{reaction} \int_{initial}^t dt.$$

$$-\frac{1}{[lac](t)} + \frac{1}{[lac](t=0)} = -N k_{reaction} \times (t-0)$$

$$\text{d'où } [lac](t) = \frac{1}{N k_{reaction} \times t + \frac{1}{[lac](0)}}$$

Q43) $[lac](t_{95}) = 0,05 \times [lac](0)$ (95% a été transformé, il en reste 5%)
c'est $1/20$

$$\text{soit } \frac{1}{[lac](t_{95})} - \frac{1}{[lac](0)} = \frac{1}{[lac](0)} [20 - 1] = + N k_{reaction} \times t_{95}.$$

$$\text{d'où } t_{95} = \frac{19}{[lac](0) \times N \times k_{reaction}}$$

$$[lac](0) = \frac{n_{lac}}{V_{tot}} = 8,3 \text{ mol.L}^{-1}$$

Je n'ai pas V_{tot} car je n'ai pas V_{DCC} . Je suppose que c'est 250 mL solide ou liquide?

A.N $t_{95} = 1,82 \cdot 10^5 \text{ s}$

$$t_{95} = 50 \text{ h}$$

C'est l'ordre de grandeur du temps de réaction.

(Sauf que l'estimation de $[lac](0)$ n'est pas précise.

Q44) Je n'ai pas la moindre idée du volume de PLA créé. On ne dit que $\rho_{PLA} = 1 \text{ g.cm}^{-3}$ d'où $V_{PLA} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ L}$.

(J'ai de TRÈS gros doutes sur la masse de PLA synthétisée. c'est qd même du plastique! On ne fabriquerait pas du plastique avec 1 rendement de 0 de 1%.)

$$E_{g,PLA} = \frac{P \times \Delta t}{V} = 1,4 \text{ GWh.m}^{-3} \quad (\text{C'est encore ridiculement élevé pour du plastique})$$

$$\begin{aligned} Q45) E_{g,Kailin} &= x^{3/2} E_{g,lin} + (1-x^{3/2}) E_{g,PLA} \\ &\approx (1-x^{3/2}) E_{g,PLA} = 0,78 \text{ GWh.m}^{-3}. \end{aligned}$$

(Et toute l'énergie pour produire les réactifs du PLA???)