

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1 *Étude d'une fonction définie comme somme d'une série entière*

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < a_n \leq 1.$$

2. On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

3. a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.

- b) Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

- c) On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, produit de Cauchy réel des deux séries $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.

Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n , une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n) .

- d) En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

4. Démontrer alors que pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

5. En déduire, pour tout $x \in [0, 1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

6. Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2 Étude d'une symétrie sur les coefficients des polynômes

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n$. Si $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ sont $2n+1$ réels et Q est le polynôme défini par : $Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, on définit le polynôme $s(Q)$ par :

$$s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k.$$

Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de Q en inversant l'ordre des coefficients. Par exemple, si n est égal à 2 et si $Q = 7X^3 + 2X^2 + 1$, on obtient $s(Q) = X^4 + 2X^2 + 7X$.

Partie I - Étude d'une application linéaire

7. Calculer $s(1)$, $s(X^n)$ et $s(X^{2n})$.

8. Montrer que l'application s est un endomorphisme de E .

9. **Diagonalisation dans le cas où $n = 1$.**

a) Vérifier que $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de l'endomorphisme s dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de E et justifier, sans calcul, que M est diagonalisable.

b) Montrer que -1 et 1 sont les seules valeurs propres de la matrice M et, pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

c) Déterminer alors une base de E formée de vecteurs propres de s . Préciser la matrice de s dans cette base.

10. **Étude du cas général.**

On ne suppose plus que n est égal à 1. On définit la famille $(A_0, \dots, A_{2n})$ de polynômes de E par :

$$A_k = \begin{cases} X^{2n-k} + X^k & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \\ X^k & \text{si } k = n \\ X^k - X^{2n-k} & \text{si } n+1 \leq k \leq 2n \end{cases}$$

a) Justifier que s est une symétrie. Que peut-on en déduire pour le spectre de s ?

b) Vérifier que $(A_0, \dots, A_{2n})$ est une famille de vecteurs propres de s et donner la dimension chacun de ses sous-espaces propres.

c) Déterminer la trace et le déterminant de s .

Partie II - Intervention du produit scalaire canonique

On introduit la fonction suivante, dont on vérifiera qu'il s'agit d'un produit scalaire lors des questions suivantes :

$$(\cdot | \cdot) : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (P, Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{2n} \frac{P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)}{(k!)^2}.$$

11. a) Justifier que, si le polynôme P de E s'écrit $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, alors

$$\forall k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket, \quad a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.$$

b) Justifier que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire et que la base canonique de E est une base orthonormale.

12. a) Pour tout polynôme P , exprimer $\|P\|$ à l'aide des coefficients de P .

b) Justifier que l'endomorphisme s est une isométrie vectorielle.

c) Justifier que l'endomorphisme s est une symétrie orthogonale.

13. On note P_1 le polynôme de E dont tous les coefficients valent 1, et $\mathcal{H}$ et Δ les deux sous-espaces vectoriels de E définis par

$$\mathcal{H} = \{Q \in E / Q(1) = 0\} \quad \text{et} \quad \Delta = \text{Vect}(P_1).$$

- a) Montrer que $\mathcal{H} = \Delta^\perp$.
 b) Soit π la projection orthogonale sur Δ . Montrer que pour tout polynôme Q de E

$$\pi(Q) = \frac{Q(1)}{2n+1} P_1.$$

- c) En déduire, pour tout polynôme Q de E , la distance $d(Q, \mathcal{H})$ de Q au sous-espace $\mathcal{H}$.

Exercice 3 *Urne de Polya*

Présentation générale

On fixe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers naturels non nuls. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et on considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule rouge indiscernables au toucher.

On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant pour tout k dans $\mathbb{N}^*$:

1. si la boule tirée est de couleur blanche lors du k -ème tirage, on la replace dans l'urne et on ajoute u_k boules blanches supplémentaires ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge lors du k -ème tirage, on la replace dans l'urne.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on désigne par B_n l'évènement « la boule tirée lors du n -ième tirage est blanche » et on note :

$$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n.$$

L'objectif principal de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite u pour que la probabilité de l'évènement E soit nulle.

On considère également la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = 1 + \sum_{k=1}^n u_k.$$

On rappelle que si A et C sont deux évènements avec $\mathbb{P}(C) > 0$, on note $\mathbb{P}(A|C)$ ou $\mathbb{P}_C(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant C .

Partie I - Probabilité de l'évènement E

Dans cette partie, on considère la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $p_n = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

14. Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire que cette suite est convergente, puis justifier que $\mathbb{P}(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

15. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si l'évènement $\bigcap_{i=1}^k B_i$ est réalisé, décrire la composition de l'urne en fonction de S_k juste avant d'effectuer le $(k+1)$ -ième tirage. En déduire la probabilité $\mathbb{P}\left(B_{k+1} \mid \bigcap_{i=1}^k B_i\right)$.

16. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{1 + S_k}.$$

Partie II - Caractérisation de la propriété $\mathbb{P}(E) = 0$

17. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
18. Montrer que les séries $\sum \ln\left(\frac{S_k}{1+S_k}\right)$ et $\sum \frac{1}{S_k}$ sont de même nature.
19. Montrer que $\mathbb{P}(E) = 0$ si et seulement si la série $\sum \frac{1}{S_k}$ est divergente.
20. Dans cette question, on suppose que $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}(E)$.
21. Proposer une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\mathbb{P}(E) \neq 0$ en justifiant votre réponse.

Exercice 4 Étude d'un endomorphisme matriciel

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note

$$\varphi_A : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C}), \quad M \mapsto AM.$$

En particulier, en notant 0_n la matrice nulle de $M_n(\mathbb{C})$ et I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{C})$, φ_{0_n} est l'application nulle de $M_n(\mathbb{C})$ et φ_{I_n} est l'application identité de $M_n(\mathbb{C})$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de l'application φ_A .

Partie I – Généralités

22. Montrer pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ que l'application φ_A est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.
23. Montrer pour tout $(A, B) \in M_n(\mathbb{C})^2$ que

$$\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}.$$

24. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Dédurre de la question précédente que φ_A est un isomorphisme si et seulement si la matrice A est inversible. **Indication** : si φ_A est un isomorphisme, on pourra considérer un antécédent par φ_A de la matrice identité de $M_n(\mathbb{C})$.

Partie II – Réduction de φ_A si A est diagonalisable

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$. Nous allons étudier les propriétés liant les éléments propres de la matrice A et ceux de l'endomorphisme φ_A .

25. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $\varphi_A^k = \varphi_{A^k}$.
26. En déduire pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ que $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$.
27. Rappeler la caractérisation de la diagonalisabilité d'une matrice ou d'un endomorphisme à l'aide d'un polynôme annulateur. En déduire que la matrice A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.
28. On note χ_A le polynôme caractéristique de A . Montrer que $\chi_A(\varphi_A)$ est l'endomorphisme nul. En déduire une inclusion entre l'ensemble des valeurs propres de A et l'ensemble des valeurs propres de φ_A , puis que la matrice A et l'endomorphisme φ_A ont les mêmes valeurs propres.
29. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A . Montrer qu'une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ appartient au sous-espace propre $E_\lambda(\varphi_A)$ de φ_A pour la valeur propre λ si et seulement si chaque colonne de M appartient au sous-espace propre $E_\lambda(A)$ de la matrice A pour la valeur propre λ .

On déduit directement de la question précédente que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de la matrice A , l'application Ψ qui à toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ associe le n -uplet de ses colonnes :

$$\Psi : \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,n} \end{pmatrix} \right)$$

est un isomorphisme du sous-espace propre de $E_\lambda(\varphi_A)$ sur $E_\lambda(A)^n$.

30. Dans le cas où A est diagonalisable, déduire des résultats de cette partie une expression du déterminant et de la trace de φ_A en fonction du déterminant et de la trace de A .