Solution (**Ex.1 –** *Étude d'une fonction définie comme somme d'une série entière*)

1. Récurrence forte avec $\mathcal{P}_n$: « $\forall k \in [\![0\,;\,n]\!], 0 < a_k \leqslant 1$ ».
   Puisque $a_0 = 1$, $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   Si $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors pour $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, $\dfrac{a_k}{n-k+2}$ sont $n+1$ nombres de $]0\,;\,1]$, leur somme est dans $]0\,;\,n+1]$ et $a_{n+1} \in]0\,;\,1]$, ce qui prouve $\mathcal{P}_{n+1}$.
2. $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1)$ et $\mathrm{RC}\left(\sum x^n\right) = 1$ donc $\mathrm{RC}\left(\sum a_n x^n\right) \geqslant 1$.
3. **a)** $\dfrac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et $\mathrm{RC}\left(\sum \dfrac{1}{n} x^n\right) = 1$ donc $\mathrm{RC}\left(\sum \dfrac{x^n}{n+2}\right) = 1$
   b) La série diverge pour $x = 1$ (série harmonique) et converge pour $x = -1$ (application du théorème de Leibniz) donc l'ensemble réel de définition est $[-1\,;\,1[$ (raisonnement qui prouve à lui seul que le rayon est 1).
   c) • La propriété du produit de Cauchy assure que le rayon de convergence est au moins le minimum des deux rayons, donc au moins 1.
   • $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{n-k+2} = (n+1)a_{n+1}$.
   d) $\forall x \in]-1\,;\,1[, \quad f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = f(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}$
4. $\forall x \in [0,1[, f(x) > 0$ car somme de termes strictement positifs, et $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$. Comme $f(0) = 1$, en prenant les primitives nulles en 0 on a $\ln(f(x)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.
5. D'abord $f(0) = 1$ Pour $x \in]0\,;\,1[$,
   $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+2} = -\ln(1-x) + \frac{1}{x}(\ln(1-x)+x) = \left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x) + 1$, donc $f(x) = \mathrm{e}(1-x)^{(1-x)/x}$.
6. $\dfrac{1}{2} \in]-1\,;\,1[$ donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mathrm{e}}{2}$.

Solution (**Ex.2 –** *Étude d'une symétrie sur les coefficients des polynômes*)

7. $s(1) = \mathrm{X}^{2n}$, $s(\mathrm{X}^n) = \mathrm{X}^n$ et $s(\mathrm{X}^{2n}) = 1$.
8. On vérifie que l'application s est un endomorphisme de E par exemple à l'aide de $s\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k \mathrm{X}^k\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k}\mathrm{X}^k$.
9. **Diagonalisation dans le cas où $\boldsymbol{n = 1}$.**
   a) D'après 7., $s(1) = \mathrm{X}^2$, $s(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$ et $s(\mathrm{X}^2) = 1$ donc M est bien a matrice de l'endomorphisme s dans la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ de E.
   M est symétrique réelle donc diagonalisable.
   b) $\chi_{\mathrm{M}} = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}+1)$ donc $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) = \{-1, 1\}$, $\mathrm{E}_{-1} = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}^2-1)$ et $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}^2+1, \mathrm{X})$.
   c) $\mathcal{M}_{(\mathrm{X}^2-1,\mathrm{X}^2+1,\mathrm{X})}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. a) $s\circ s\left(\sum_{k=0}^{2n} a_k X^k\right) = s\left(\sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k}X^k\right) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-(2n-k)}X^k = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ donc $s\circ s = id_E$. Donc s est un symétrie, donc diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(s)\subset\{-1,1\}$. s n'étant ni id_E ni $-id_E$, $\mathrm{Sp}(s)=\{-1,1\}$.

b) Pour $k\in[\![0\,;\,n]\!]$, $s(A^k)=A_k$ donc $A_k\in E_1$.
Pour $k\in[\![n+1\,;\,2n]\!]$, $s(A^k)=-A_k$ donc $A_k\in E_{-1}$.
Or $(A_k, 0\leqslant k\leqslant n)$ est échelonnée donc est une famille libre de E_1, donc $\dim(E_1)\geqslant n+1$.
De même $(A_k, n+1\leqslant k\leqslant 2n)$ est échelonnée donc est une famille libre de E_{-1}, donc $\dim(E_{-1})\geqslant n$.
Comme $E=E_{-1}\oplus E_1$, $\dim(E_{-1})+\dim(E_1)=\dim(E)=2n+1$, on a nécessairement $\dim(E_1)=n+1$ et $\dim(E_{-1})=n$, et $(A_k, 0\leqslant k\leqslant n)$ et $(A_k, n+1\leqslant k\leqslant 2n)$ en sont des bases respectives.

c) Dans la base $(A_k, 0\leqslant k\leqslant 2n)$, s est représentée par $D=\left(\begin{array}{c|c} -I_n & 0 \\ \hline 0 & I_{n+1}\end{array}\right)$. Alors $\mathrm{Tr}(s)=\mathrm{Tr}(D)=1$ et $\det(s)=\det(D)=(-1)^n$.

11. a) On peut invoquer la formule de Taylor pour les polynômes (1ère année) ou la série de Taylor car P est somme d'une série entière (2nde année). Ou juste le prouver par dérivations successives :
$P^{(i)}(X)=\sum_{k=i}^{2n} k(k-1)\dots(k-i+1)a_kX^{k-i}$ donc $P^{(i)}(0)=i(i-1)\dots1\times a_i\times 0^0=i!a_i$.

b) Avec la question précédente, $\left(\sum_{k=0}^{2n} a_kX^k \mid \sum_{k=0}^{2n} b_kX^k\right)=\sum_{k=0}^{2n} a_kb_k$.
On retrouve l'expression du produits scalaire canonique de R^{2n+1}, avec la même démonstration qu'il s'agit d'une produit scalaire et du fait que la base canonique est orthonormale.
On peut aussi raisonner avec la définition initial de ce produit scalaire...

12. a) $\left\|\sum_{k=0}^{2n} a_kX^k\right\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{2n} a_k^2}$

b) $\left\|s\left(\sum_{k=0}^{2n} a_kX^k\right)\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k}X^k\right\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k}^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{2n} a_k^2} = \left\|\sum_{k=0}^{2n} a_kX^k\right\|$ donc s est une isométrie vectorielle.

c) s est la symétrie d'axe E_1 et de direction E_{-1}.
Soit $P\in E_1$ et $Q\in E_{-1}$. Comme s est une isométrie
$\left(P\mid Q\right)=\left(s(P)\mid s(Q)\right)=\left(P\mid -Q\right)=-\left(P\mid Q\right)$ donc $\left(P\mid Q\right)=0$ et $P\perp Q$. Donc $E_1\perp E_{-1}$ et s est une symétrie orthogonale.

13. a) Observons que pour tout polynôme $Q=\sum_{k=0}^{2n} a_kX^k$, $\left(Q\mid P_1\right)=\sum_{k=0}^{2n} a_k=Q(1)$.
$Q\in\mathcal{H}\Leftrightarrow Q(1)=0\Leftrightarrow\left(Q\mid P_1\right)=0\Leftrightarrow Q\in(\mathrm{Vect}(P_1))^\perp\Leftrightarrow Q\in\Delta^\perp$.

b) Prenons $Q_1=\frac{1}{\|P_1\|}P_1=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}P_1$. Alors (Q_1) est une B.O.N. de Δ donc
$\pi(Q)=\left(Q\mid Q_1\right)Q_1=\frac{1}{2n+1}\left(Q\mid P_1\right)P_1=\frac{Q(1)}{2n+1}P_1$.

c) $d(Q,\mathcal{H})=\min_{P\in\mathcal{H}}\|Q-P\|=\|Q-p_{\mathcal{H}}(Q)\|$ or puisque $\mathcal{H}=\Delta^\perp$, $Q=p_{\mathcal{H}}(Q)+\pi(Q)$, donc $d(Q,\mathcal{H})=\|\pi(Q)\|=\frac{Q(1)}{2n+1}\|P_1\|=\frac{Q(1)}{\sqrt{2n+1}}$.

Solution (**Ex.3 –** *Urne de Polyà*)

14. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k\subset\bigcap_{k=1}^{n} B_k$ donc par croissance de la probabilité, $p_{n+1}\leqslant p_n$.

Comme (p_n) est décroissante et minorée par 0, (p_n) converge.

La suite $\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante, la continuité monotone assure que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(E) = \lim_{n\to+\infty} p_n$.

15. Si l'évènement $\bigcap_{i=1}^{k} B_i$est réalisé, décrire la composition de l'urne contient S_k boules blanche et la boule rouge juste avant d'effectuer le $(k+1)$-ième tirage. Donc $\mathbb{P}\left(B_{k+1} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) = \dfrac{S_k}{1+S_k}$ par équiprobabilité.

16. Les (B_n) ne sont évidemment pas indépendants mais la formule des probabilités composées assure que :

$$p_n = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3)\ldots\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)\prod_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}\left(B_{k+1}\,\middle|\,\bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{S_k}{1+S_k}$$

puisque $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{S_0}{1+S_0}$.

17. $\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} u_k \geqslant 1+n$ puisque $\forall k\in\mathbb{N}, u_k \geqslant 1$. Par comparaison $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

18. $\dfrac{S_k}{1+S_k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{S_k}{S_k} = 1$ donc $\ln\left(\dfrac{S_k}{1+S_k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{S_k}{1+S_k} - 1 \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{1+S_k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{S_k}$. Par équivalence de termes généraux de signe constant, les séries $\sum \ln\left(\dfrac{S_k}{1+S_k}\right)$ et $\sum \dfrac{-1}{S_k}$ sont de même nature, et de même nature que $\sum \dfrac{1}{S_k}$ par linéarité.

19. Rappelons que (p_n) converge et que $\mathbb{P}(E) = \lim_{n\to+\infty} p_n$.

Notons que $\sum \ln\left(\dfrac{S_k}{1+S_k}\right)$ étant une série à terme général négatif, elle diverge si, et seulement si, elle diverge vers $-\infty$.

On a : $\ln(p_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\dfrac{S_k}{1+S_k}\right)$. Donc

$$\mathbb{P}(E) = 0 \Leftrightarrow p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Leftrightarrow \ln(p_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \Leftrightarrow \sum \ln\left(\frac{S_k}{1+S_k}\right) \text{ diverge} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{S_k} \text{ diverge.}$$

20. $\forall n\in \mathrm{N}, S_n = n+1$ donc $\sum \dfrac{1}{S_n}$ diverge donc $\mathbb{P}(E) = 0$.

21. Prenons : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad u_n = n$, de sorte que $S_n = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{2}$. Alors $\dfrac{1}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$ et la série $\sum \dfrac{1}{S_n}$ converge. Alors $\mathbb{P}(E) \neq 0$.

Solution (**Ex.4 –** *Étude d'un endomorphisme matriciel*)

22. La linéarité provient directement de la distributivité du produit.

23. $\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi_A\circ\varphi_B(M) = \varphi_A(BM) = ABM = \varphi_{AB}(M)$ donc $\varphi_A\circ\varphi_B = \varphi_{AB}$.

24. • Si A est inversible, $\varphi_A\circ\varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_{I_n} = id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ et de même $\varphi_{A^{-1}}\circ\varphi_A = id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ donc φ_A est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'isomorphisme réciproque $\varphi_{A^{-1}}$.
• Si φ_A est un isomorphisme, I_n possède un unique antécédent $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\varphi_A(B) = I_n$. Alors $AB = I_n$, donc A est inversible, d'inverse B.
Dans cette partie, on considère une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Nous allons étudier les propriétés liant les éléments propres de la matrice A et ceux de l'endomorphisme φ_A.

25. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \varphi_A^k(M) = A^k M = \varphi_{A^k}(M)$. Une récurrence convaincra les plus réservées.

26. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$P(\varphi_A)(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k \varphi_A^k(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k \varphi_{A^k}(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k M = P(A)M = \varphi_{P(A)}(M)$. Ainsi $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$.

27. Machin est diagonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme annulateur de machin scindé à racines simples, machin étant soit une matrice soit un endomorphisme.

• Supposons A est diagonalisable, et soit P un polynôme annulateur de A scindé à racines simples. Alors $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)} = \varphi_{0_n} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}$: P est aussi annulateur de φ_A, qui est par conséquent diagonalisable.

• Supposons φ_A est diagonalisable, et soit P un polynôme annulateur de φ_A scindé à racines simples. Alors $\varphi_{P(A)} = P(\varphi_A) = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}$.

Ainsi : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), P(A)M = 0_n$. En prenant $M = (P(A))^T$, on a :

$\|P(A)\|^2 = \mathrm{Tr}\left(P(A)(P(A))^T\right) = \mathrm{Tr}(0_n) = 0$, ce qui prouve que $P(A) = 0_n$, donc que A est diagonalisable.

28. Le théorème de Cayley-Hamilton assure que χ_A est annulateur de A, donc par 26. $\chi_A(\varphi_A) = \varphi_{0_n} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}$.

On en déduit que les valeurs propres de φ_A sont parmi les racines de χ_A, or les racines de χ_A sont les valeurs propres de A : $\mathrm{Sp}(\varphi_A) \subset \mathrm{Sp}(A)$.

Réciproquement, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Soit alors $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $AU = \lambda U$, et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice dont les n colonnes sont égales à U. Alors $AM = \lambda M$, donc $\varphi_A(M) = \lambda M$ avec $M \neq 0_n$. Ainsi $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi_A)$.

Finalement $\mathrm{Sp}(\varphi_A) = \mathrm{Sp}(A)$.

29. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de M, de sorte que l'on peut écrire par blocs : $M = (C_1 \cdots C_n)$.

$$\begin{aligned}
M \in E_\lambda(\varphi_A) &\iff \varphi_A(M) = \lambda M \\
&\iff AM = \lambda M \\
&\iff A \times (C_1 \cdots C_n) = (\lambda C_1 \cdots \lambda C_n) \\
&\iff (A \times C_1 \cdots A \times C_n) = (\lambda C_1 \cdots \lambda C_n) \\
&\iff \forall k \in [\![1\,;n]\!], A \times C_k = \lambda C_k \\
&\iff \forall k \in [\![1\,;n]\!], C_k \in E_\lambda(A)
\end{aligned}$$

30. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres (deux à deux distinctes), de A, et $r_1, \ldots, r_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Puisque A est diagonalisable, $\mathrm{Tr}(A) = \sum\limits_{k=1}^{p} r_k \lambda_k$ et $\det(A) = \prod\limits_{k=1}^{p} \lambda_k^{r_k}$.

D'après **Q27.**, la diagonalisabilité de A garantit celle de φ_A, si bien que la trace de φ_A est la somme de ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité) et le déterminant de φ_A est le produit de ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité).

Dans les deux phrases précédentes, la trigonalisabilité suffisait, et celle-ci est acquise, puisqu'on travaille dans des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

De plus, d'après **Q28.**, $\mathrm{Sp}(\varphi_A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ et, d'après la remarque qui suit la question **Q29.**, pour tout $k \in [\![1\,;p]\!]$, les espaces $E_{\lambda_k}(\varphi_A)$ et $E_{\lambda_k}(A)^n$ sont isomorphes, donc $\dim(E_{\lambda_k}(\varphi_A)) = \dim\left(E_{\lambda_k}(A)^n\right) = n\dim(E_{\lambda_k}(A))$. Puisque A est diagonalisable, pour tout $k \in [\![1\,;p]\!]$, $\dim(E_{\lambda_k}(A)) = r_k$, et donc $\dim(E_{\lambda_k}(\varphi_A)) = nr_k$.

Par conséquent, $\mathrm{Tr}(\varphi_A) = \sum\limits_{k=1}^{p} nr_k\lambda_k = n\sum\limits_{k=1}^{p} r_k\lambda_k = n\mathrm{Tr}(A)$ et $\det(\varphi_A) = \prod\limits_{k=1}^{p} \lambda_k^{nr_k} = \left(\prod\limits_{k=1}^{p} \lambda_k^{r_k}\right)^n = \det(A)^n$.