

Corrigé de la deuxième épreuve de mathématique

Centrale PSI 2022

daouia_abdelkader@hotmail.fr

I Préliminaires : étude de quelques éléments de E I.A - Des fonctions de E utiles pour la suite

Q.1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$, $p_\alpha(t) = t^\alpha$ $t \in [0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto (p_\alpha(t))^2 \frac{e^{-t}}{t} = t^{2\alpha-1} e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et positive.

(a) Au voisinage de 0, $t^{2\alpha-1} e^{-t} \sim_0 t^{2\alpha-1} = \frac{1}{t^{1-2\alpha}} \geq 0$.

$t \mapsto \frac{1}{t^{1-2\alpha}}$ est intégrable sur $]0, 1]$, c'est une intégrale de Riemann $1 - 2\alpha < 1$, donc la fonction est intégrable sur $]0, 1]$.

(b) Au voisinage de $+\infty$, $t^{2\alpha-1} e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$, elle est donc intégrable sur $[1, +\infty[$

$$\int_0^{+\infty} (p_\alpha(t))^2 \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_0^{+\infty} t^{2\alpha-1} e^{-t} dt = \Gamma(2\alpha)$$

Q.2

P une fonction polynomiale, elle est continue.

(a) Si $P(0) \neq 0$, on a l'équivalence : $P^2(t) \frac{e^{-t}}{t} \sim_0 \frac{P^2(0)}{t}$, cette fonction garde un signe constant. $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$, on peut donc en utilisant le critère de comparaison des fonctions positives dire que $t \mapsto P^2(t) \frac{e^{-t}}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$

(b) Si $P(0) = 0$, la fonction $t \mapsto P^2(t) \frac{e^{-t}}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 (donc intégrable sur $]0, 1]$), et négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, ce qui achève la justification de l'intégrabilité.

Q.3

Si $a = b = 0$, la fonction est nulle, $0 \in E$.

Réciproquement, supposons que $a \neq 0$, au voisinage de $+\infty$, on a

$$(a e^t + b)^2 \frac{e^{-t}}{t} \sim a^2 \frac{e^t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

La fonction n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. La première condition d'intégrabilité est que $a = 0$. Supposons que $a = 0$, la fonction est une fonction polynomiale constante, elle est dans E ssi $b = 0$.

Q.4

$t \mapsto (e^t - 1)^2 \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, x]$, le développement limité au voisinage de 0 donne :

$$\lim_{t \rightarrow 0} (e^t - 1)^2 \frac{e^{-t}}{t} = 0$$

Elle est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0, x]$.

Q.5

$k_x(t) = e^t - 1$, $t \in]0, x]$, $k_x(t) = e^x - 1 = cte$, $t \in [x, +\infty[$. La fonction est continue .

D'après la question précédente $t \mapsto k_x^2(t) \frac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur $]0, x]$.

Sur $[x, +\infty[$, $t \mapsto k_x^2(t) \frac{e^{-t}}{t}$ est négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$.

I.B – Une condition suffisante d'appartenance à E

Dans cette sous partie , on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ à valeurs réelles et vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad , \quad \exists C > 0 ; \forall x > 0 , |f'(x)| \leq C \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$

Q.6

La fonction $t \mapsto \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}$ est continue ,intégrable sur $]0, x]$, pour tout $x > 0$ (équivalente au voisinage de 0 à $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, la fonction Φ est bien définie .

On peut écrire :

$$\Phi(x) = \frac{4\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}}{x+1} - \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} dt}_{cte} - \int_1^x \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} dt \quad x > 0$$

Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$

$$\Phi'(x) = \frac{(1-x)^2 e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}(x+1)^2} \geq 0 \quad x > 0$$

$$0 \leq \int_0^x \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} dt \leq e^{\frac{x}{2}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2e^{\frac{x}{2}} \sqrt{x} \quad x > 0$$

On peut en déduire facilement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = 0$$

Comme la fonction est croissante , elle est toujours positive sur $]0, +\infty[$ $(\int_0^x \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} dt \leq \frac{4\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}}{x+1})$.

Q.7

Pour $x > 0$, f admet 0 comme limite en 0 :

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq C \int_0^x \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} dt \leq \frac{4C\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}}{x+1}$$

Q.8

f est continue , et on a l'encadrement :

$$0 \leq f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{16 C^2}{(1+t)^2} \quad t > 0$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, il en découle immédiatement l'intégrabilité de $t \mapsto f^2(t) \frac{e^{-t}}{t}$, d'où $f \in E$.

Q.9

f, g sont dans E , la fonction $t \mapsto f(t)g(t)\frac{e^{-t}}{t}$ est continue. En utilisant la relation

$$2|ab| \leq a^2 + b^2 \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

On peut écrire :

$$\left| f(t)g(t)\frac{e^{-t}}{t} \right| = \underbrace{\left| f(t)\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} \right|}_a \underbrace{\left| g(t)\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} \right|}_b \leq \frac{1}{2} \left(\underbrace{f^2(t)\frac{e^{-t}}{t}}_{\text{intégrable, } f \in E} + \underbrace{g^2(t)\frac{e^{-t}}{t}}_{\text{intégrable, } g \in E} \right)$$

Q.10

E est non vide, contenu dans l'ensemble des fonction continues sur $]0, +\infty[$ qui est un espace vectoriel.

Si on prend $(f, g) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda f(t) + g(t))^2 \frac{e^{-t}}{t} = \lambda^2 f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} + g^2(t) \frac{e^{-t}}{t} + 2\lambda f(t)g(t) \frac{e^{-t}}{t}$$

Les trois fonctions sont intégrables, il en découle $(\lambda f + g) \in E$.

E est donc un sous espace vectoriel.

Q.11

L'intégrale qui définit ce produit scalaire est bien définie. (l'intégrale converge).

La symétrie et la bilinéarité sont évidentes.

$\langle f, f \rangle = \int_0^{+\infty} f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \geq 0$. Si l'intégrale est nulle, comme la fonction qu'on intègre est positive continue, on doit avoir :

$$f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} = 0 \implies f(t) = 0 \quad \forall t \in]0, +\infty[$$

C'est donc un produit scalaire.

Q.12

On peut raisonner de deux manières :

(a) En utilisant le théorème de la convergence dominée TCD :

Soit $(x_n)_n$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0. On note :

$$h_n(t) = k_{x_n}^2(t) \frac{e^{-t}}{t}, \quad t \in]0, +\infty[$$

Soit $t \in]0, +\infty[$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$: $x_n \leq t \quad \forall n \geq n_0$ (la définition de la limite avec $\varepsilon = t$).

$$\forall n \geq n_0, \quad h_n(t) = (e^{x_n} - 1)^2 \frac{e^{-t}}{t} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La suite $(h_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle.

La suite $(x_n)_n$ est bornée, il existe $m > 0$ tel que $0 < x_n \leq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

La fonction $t \mapsto \frac{(e^t - 1)^2}{t}$, est continue sur $[0, m]$, prolongeable par continuité en 0, elle est donc bornée :

$$\exists M > 0 : \quad 0 \leq \frac{(e^t - 1)^2}{t} \leq M \implies 0 \leq h_n(t) \leq M e^{-t} \quad \forall t \in]0, x_n]$$

Pour $t \in [x_n, +\infty[$, $0 \leq h_n(t) = (e^{x_n} - 1)^2 \frac{e^{-t}}{t} \leq (e^{x_n} - 1)^2 \frac{(e^{x_n} - 1)^2}{x_n} e^{-t} \leq M e^{-t}$

On a donc la domination :

$$0 \leq h_n(t) \leq M e^{-t} = \varphi(t) \quad \forall t \in]0, +\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

φ est intégrable , le théorème de la convergence dominée permet d'intervertir :

$$\|k_{x_n}\|^2 = \int_0^{+\infty} k_{x_n}^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_0^{+\infty} h_n(t) dt \longrightarrow \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) dt = 0$$

(b) En utilisant un encadrement :

En gardant les mêmes notations :

$$\begin{aligned} 0 \leq \|k_{x_n}\|^2 &= \int_0^{+\infty} k_{x_n}^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_0^{x_n} k_{x_n}^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{x_n}^{+\infty} k_{x_n}^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &\leq M \int_0^{x_n} e^{-t} dt + (e^{x_n} - 1)^2 \int_{x_n}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &\leq M \int_0^{x_n} dt + \frac{(e^{x_n} - 1)^2}{x_n} \int_{x_n}^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= M x_n + \frac{(e^{x_n} - 1)^2}{x_n} e^{-x_n} \end{aligned}$$

Ce dernier membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Q.13

On pose $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \langle p_{k+1}, 1 \rangle$, $p_\alpha(t) = t^\alpha$ $k \in \mathbb{N}^*$.

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_0^A = 1$$

On fait une intégration par parties :

$$u(t) = t^k \quad , \quad u'(t) = k t^{k-1} \quad , \quad v'(t) = e^{-t} \quad , \quad v(t) = -e^{-t}$$

On trouve :

$$I_k = k I_{k-1} = \dots = k! I_0 = k!$$

Q.14

$$\langle p_n, p_m \rangle = I_{n+m} = (n+m)! \neq 0$$

La famille n'est pas orthogonale.

III Un opérateur sur E

Q.15

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz , on peut écrire :

$$0 \leq |U(f)(x)| \leq |\langle k_x, f \rangle| \leq \|k_x\| \|f\|$$

Et on utilise la question Q.12 pour conclure.

Q.16

$$k_x(t) = e^t - 1 \quad , \quad t \in]0, x] \quad , \quad k_x(t) = e^x - 1 = cte \quad , \quad t \in [x, +\infty[.$$

$$U(f)(x) = \int_0^x k_x(t) f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_x^{+\infty} k_x(t) f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$$

On remplace dans chaque intégrale $k_x(t)$ par sa valeur.

Q.17

On change un peu l'écriture :

$$\begin{aligned} U(f)(x) &= \int_0^x f(t) \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + (e^x - 1) \left(- \int_1^x f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \right) \\ &= \int_0^x f(t) \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + (e^x - 1) \left(cte - \int_1^x f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \right) \end{aligned}$$

Les fonctions $t \mapsto f(t) \frac{1 - e^{-t}}{t}$ et $t \mapsto f(t) \frac{e^{-t}}{t}$ sont continues sur $]0, +\infty[$, $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et on a :

$$\begin{aligned} (U(f))'(x) &= \frac{1 - e^{-x}}{x} f(x) + e^x \left(cte - \int_1^x f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \right) - (e^x - 1) f(x) \frac{e^{-x}}{x} \\ &= e^x \left(cte - \int_1^x f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \right) \\ &= e^x \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \end{aligned}$$

Q.18

$U(f)'$ est le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$:

$$U(f)''(x) = e^x \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt - e^x f(x) \frac{e^{-x}}{x} = U(f)'(x) - \frac{f(x)}{x}$$

$U(f)$ est solution de l'équation différentielle :

$$y''(x) - y'(x) = -\frac{f(x)}{x}$$

Q.19

$$\begin{aligned} |U(f)'(x)| &= \left| e^x \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \right| \leq e^x \int_x^{+\infty} \left| f(t) \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \right| \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} dt \\ &\leq e^x \left(\int_x^{+\infty} f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq e^x \left(\int_0^{+\infty} f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{e^x}{\sqrt{x}} \|f\| \left(\underbrace{\int_x^{+\infty} e^{-t} dt}_{=e^{-x}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \|f\| \end{aligned}$$

Q.20

On utilise les questions Q.7 , Q.15 , avec $C = \|f\|$.
La linéarité de U est évidente.

Q.21

Partant de la majoration précédente :

$$\begin{aligned}\|U(f)\|^2 &= \int_0^{+\infty} (U(f)(t))^2 \frac{e^{-t}}{t} dt \leq 16\|f\|^2 \int_0^{+\infty} \frac{t e^t}{(1+t)^2} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= 16\|f\|^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2} dt \\ &= 16\|f\|^2\end{aligned}$$

Q.22

Soit $f \in \text{Ker}(U)$

$$U(f) = 0 \implies U(f)' = 0 \quad , \quad U(f)'' = 0$$

On remplace dans l'équation différentielle de la question Q.18 , on conclut immédiatement que $f(x) = 0$, $\forall x \in]0, +\infty[$.

Q.23

Supposons que U est surjectif , on prend $\alpha = \frac{1}{4} > 0$, $p_\alpha \in E$ admet un antécédent

$$\exists f \in E \quad : \quad x^{\frac{1}{4}} = p_\alpha(x) = U(f)(x) \leq 4\|f\| \frac{\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}}{1+x} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

On simplifie par $x^{\frac{1}{4}}$, et on fait tendre x vers 0 , on trouve $1 \leq 0$, ce qui est absurde .
 U n'est pas surjectif .

Q.24

On dérive F et on utilise l'équation différentielle de la question Q.18 vérifiée par $U(f)$.

Q.25

En utilisant la question Q.19 , on trouve :

$$|F(x)| \leq \|f\| \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

On utilise la question Q.20 , :

$$|F(x) - U(g)(x)| \leq \|f\| \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} 4\|g\| \frac{\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}}{1+x} = \frac{4\|f\| \|g\|}{1+x} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

Q.26

La première majoration dans la question Q.19 , est :

$$|F(x)| \leq \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour $x \in]0, 1[$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^1 \frac{1}{t} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} dt = -\ln(x) + e^{-1}$$

Q.27

La majoration dans la question Q.24 , donne directement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) U(g)(x) = 0$$

Sur $]0, 1[$,

$$|F(x) U(g)(x)| \leq 4 \|f\| \|g\| \left(x e^{-1} - x \ln(x) \right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Q.28

$$\langle f, U(g) \rangle = \int_0^{+\infty} U(g)(t) \left(f(t) \frac{e^{-t}}{t} \right) dt = \int_0^{+\infty} U(g)(t) F'(t) dt$$

On effectue une intégration par parties en utilisant la question précédente , on trouve :

$$\langle f, U(g) \rangle = - \int_0^{+\infty} U(g)'(t) F(t) dt = \int_0^{+\infty} U(g)'(t) U(f)'(t) e^{-t} dt$$

Q.29

Par symétrie du produit scalaire :

$$\langle U(f), g \rangle = \langle g, U(f) \rangle = \int_0^{+\infty} U(g)'(t) U(f)'(t) e^{-t} dt = \langle f, U(g) \rangle$$

IV Solutions d'une équation différentielle développables en série entière

Q.30

f une solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_p) .

On peut dériver terme à terme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad , \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad , \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On injecte dans l'équation :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} p a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} p a_n x^n &= 0 \end{aligned}$$

En effectuant un changement d'indice dans le premier terme , on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} p a_n x^n = 0$$

Finalement , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n(n+1) a_{n+1} - (n-p) a_n \right) x^n = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Tous les coefficients sont nuls , et en prenant $x = 0$ dans l'équation (E_p) , on trouve :

$$a_0 = f(0) = 0 \quad , \quad n(n+1) a_{n+1} - (n-p) a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Q.31

(E_p) admet une solution polynomiale h non nulle si et seulement si h est une solution développable en série entière et il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$a_{n+1} = 0, \quad a_n \neq 0$$

Si pour un entier k , $a_k = 0$ on a $a_m = 0 \quad \forall m \geq k$.

En utilisant la relation $n(n+1)a_{n+1} = (n-p)a_n$, on trouve $p = n \in \mathbb{N}^*$

Réciproquement, si $p \in \mathbb{N}^*$, on peut construire une solution polynomiale de (E_p) en utilisant la relation de récurrence de la question Q.30.

Soit $P(x) = \sum_{k=1}^r a_k x^k$, une solution polynomiale de (E_p) , de degré r ($a_r \neq 0$), on remplace dans l'équation et on identifiant le coefficient de x^r , on trouve :

$$0 = (-r + p)a_r \implies r = p$$

Q.32

P est solution de (E_p) , $(x(P'' - P') + pP = 0)$.

$$h(x) = e^{-x} P, \quad h'(x) = -e^{-x} P + e^{-x} P', \quad h''(x) = e^{-x} P - 2e^{-x} P' + e^{-x} P''$$

$$x(h'' + h') + p h = (x(P'' - P') + p P)e^{-x} = 0$$

Q.33

On écrit $P(x) = \sum_{k=1}^p a_k x^k$, $h(x) = P(x)e^{-x}$.

h est le produit de deux sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, elle est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Q.34

On utilise la relation de récurrence donnée, et on raisonne par récurrence.

Q.35

La fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, on multiplie juste par x^{p-1} et on trouve :

$$g_p(x) = x^{p-1}e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+p-1}}{n!} \quad x \in \mathbb{R}$$

En dérivant terme à terme :

$$g_p^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+p-1) \dots n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!n!} x^{n-1}$$

$$\text{On pose } c_n = (-1)^n \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!n!} = \frac{p!}{b_1} b_n \quad n \geq 1$$

$$xg_p^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \frac{p!}{b_1} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{p!}{b_1} h(x) \implies xg_p^{(p)}(x) = \frac{p!}{b_1} P(x)e^{-x}$$

On remarque que :

$$P(x) = C x e^x g_p^{(p)}(x), \quad C = \frac{b_1}{p!}$$

Q.36

On prend juste $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ quelconque , et on construit la suite $(a_n)_n$ par la relation de récurrence défini dans la question Q.30 , la somme de la série entière est une solution de l'équation .

Comme $p \notin \mathbb{N}$, on a alors $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, et $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow 0$, le rayon de convergence est $+\infty$.

Q.37

$\frac{(n+1)|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|n-p|}{n} \rightarrow 1$, en appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on trouve le résultat.

Q.38

On peut soit raisonner par récurrence , soit utiliser la relation et faire le produit pour k variant de q à $n-1$.

Q.39

Pour tout $x \geq 0$

$$\psi(x) = \sum_{n=q}^{+\infty} |a_n| x^n \geq K \sum_{n=q}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n!} = K \left(e^{\frac{x}{2}} - R(x) \right) , \quad K = 2^q |a_q| q! , \quad R(x) = \sum_{n=0}^{q-1} \frac{x^n}{2^n n!}$$

$$\psi^2(x) \frac{e^{-x}}{x} \geq \frac{K^2}{x} \left(1 - e^{-\frac{x}{2}} R(x) \right)^2 \sim_{+\infty} \frac{K^2}{x}$$

La fonction $x \mapsto \psi^2(x) \frac{e^{-x}}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $\psi \notin E$.

Q.40

La suite $(a_n)_n$ garde un signe constant à partir du premier entier supérieur à p , soit $n_0 = \lfloor p \rfloor + 1$ cet entier , on a donc :

$$|a_n| = a_n \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{ou} \quad |a_n| = -a_n \quad \forall n \geq n_0$$

Puis on utilise la question précédente.

V Éléments propres de E

Q.41

U est injectif , 0 n'est donc pas une valeur propre de U .

Q.42

λ une valeur propre de U , et f un vecteur propre associé , $U(f) = \lambda f$.D'après la question Q.18 , $U(f)$ est solution de l'équation :

$$y'' - y' = -\frac{f(x)}{x}$$

On a donc :

$$\lambda f'' - \lambda f' = -\frac{f(x)}{x} \implies x(f'' - f') + \frac{1}{\lambda} f = 0$$

Q.43

f un vecteur propre associé à la valeur propre λ , $f \in E$, d'après la question Q.40 , on ne peut avoir $p = \frac{1}{\lambda} \notin \mathbb{N}^*$:

$$\lambda = \frac{1}{p} \in \mathbb{N}^*$$

Q.44

P est une solution de (E_p) , : $x(P'' - P') + p P = 0$.

$U(P)$ vérifie l'équation : $y'' - y' = -\frac{P(x)}{x} \implies x(U(P)'' - U(P)') + P = 0$

On pose : $T = p U(P) - P$:

$$T'' - T' = p(U(P)'' - U(P)') - (P'' - P') = 0$$

Q.45

En gardant les notations de la question précédente :

$$T'' - T' = 0$$

L'équation caractéristique est : $r^2 - r = 0$, on a deux racines réelles distinctes 0 et 1 :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 : p U(P)(x) - P(x) = T(x) = a e^x + b \quad \forall x \in \mathbb{R}^{*+}$$

P et $U(P)$ sont dans E qui est un sous espace vectoriel (Q.10), d'après la question Q.3, on doit avoir $a = b = 0$:

$$T = 0 \implies U(P) = \frac{1}{p}P$$

P est donc un vecteur propre de U .

Q.46

On prend deux entiers non nuls p, q distincts, $U(P_p) = \frac{1}{p}P_p$, $U(P_q) = \frac{1}{q}P_q$

En utilisant la question Q.29 :

$$\langle \frac{1}{p}P_p, P_q \rangle = \langle U(P_p), P_q \rangle = \langle P_p, U(P_q) \rangle = \langle P_p, \frac{1}{q}P_q \rangle$$

On trouve :

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \langle P_p, P_q \rangle = 0 \implies \langle P_p, P_q \rangle = 0$$