

Exercice 1 *Isométries diagonalisables*

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$.

On suppose f diagonalisable.

Montrer que f est une symétrie orthogonale.

Solution (Ex.1 – Isométries diagonalisables)

f est une isométrie donc ses seules valeurs propres réelles possibles sont -1 et 1 : $\text{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$.

Trois cas sont possibles :

- $\text{Sp}(f) = \{1\}$, et comme f est diagonalisable, $f = 1 \times \text{id}_E$;
- $\text{Sp}(f) = \{-1\}$, et comme f est diagonalisable, $f = -1 \times \text{id}_E$;
- $\text{Sp}(f) = \{-1, 1\}$, et comme f est diagonalisable, dans une base propre $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) =$

$$\begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \text{ (avec } p = \dim(\text{SEP}(f, -1)) \text{ et } q = \dim(\text{SEP}(f, 1))) \text{.}$$

Dans les trois cas, $f^2 = \text{id}_E$.

Donc f est une symétrie, toujours d'axe E_1 et de direction E_{-1} .

Soit $u \in E_1$ et $v \in E_{-1}$.

f est orthogonale donc conserve le produit scalaire, donc $\langle u, v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, -v \rangle = -\langle u, v \rangle$, donc $\langle u, v \rangle = 0$ et $u \perp v$.

Ceci prouve que $E_1 \perp E_{-1}$ donc que f est une symétrie orthogonale.

Exercice 2 *Complémentaire d'une isométrie*

Soit f une isométrie d'un espace euclidien E .

On pose $g = \text{id}_E - f$.

Montrer que

$$\text{Ker}(g) = (\text{Im}(g))^{\perp}.$$

Solution (Ex.2 – Complémentaire d'une isométrie)

Soit $x \in \text{Ker}(g)$ et $y \in \text{Im}(g)$.

$x \in \text{Ker}(g)$ donc $x = f(x)$.

Soit $z \in E$ tel que $y = g(z) = z - f(z)$.

$\langle x, y \rangle = \langle x, z - f(z) \rangle = \langle x, z \rangle - \langle f(x), f(z) \rangle$ car $x = f(x)$,

$\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x, z \rangle$ car f conserve le produit scalaire.

$\langle x, y \rangle = 0$.

Ainsi : $\text{Ker}(g) \perp \text{Im}(g)$.

Mais par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = \dim(E)$.

Donc $\text{Ker}(g)$ est le supplémentaire orthogonal de $\text{Im}(g)$.

Exercice 3 *Étude d'une isométrie*

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{B}$ sa base canonique.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que f est une isométrie.
2. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + z = 0$ est stable par f .
3. $\mathcal{P}^{\perp}$ est-il stable par f ?
4. Déterminer la matrice de f relativement à une base orthonormale adaptée à la décomposition $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp} = E$.

Solution (Ex.3 – Étude d'une isométrie)

1. Les colonnes de M forment une famille orthonormale. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E , f est une isométrie de E .

2. $\mathcal{P} = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, 0)) = \text{Vect}(u, v)$.

Or $f(u) = \sqrt{2}v \in \mathcal{P}$ et $f(v) = -\frac{\sqrt{2}}{2}u \in \mathcal{P}$, donc $\mathcal{P}$ est stable par f .

3. f est une isométrie et $\mathcal{P}$ est stable par f donc $\mathcal{P}^{\perp}$ est stable par f .

4. $\mathcal{P}^{\perp} = \text{Vect}((1, 0, 1)) = \text{Vect}(w)$.

Prenons $\mathcal{C} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}u, v, \frac{1}{\sqrt{2}}w \right)$, base orthonormale adaptée à $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp} = E$. Alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 4 *Endomorphisme de $\mathbb{R}^3$*

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, nature de l'endomorphisme canoniquement associé à

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution (Ex.4 – Endomorphisme de $\mathbb{R}^3$)

Symétrie orthogonale d'axe le plan d'équation $x + y - 2z = 0$.

Exercice 5 Endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, On considère l'endomorphisme φ canoniquement associé à

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

1. a) Justifier que φ est une isométrie. Est-elle diagonalisable?
b) Justifier que $\mathcal{P} = (E_1)^\perp$ est stable par φ et donner la nature précise de la restriction de φ à $\mathcal{P}$.
2. Montrer que φ^2 est une symétrie orthogonale et préciser son axe.

Solution (Ex.5 – Endomorphisme de $\mathbb{R}^3$)

φ est une isométrie, $\text{Sp}(\varphi) = \{1\}$. $E_1 = \text{Vect}(1, 0, 1)$ est stable par φ et φ est une isométrie donc $\mathcal{P} = (E_1)^\perp$ est aussi stable.

$\mathcal{C} = \left(\frac{1}{2}(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), \frac{1}{2}(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}), (0, 1, 0) \right) = (u, v, w)$ est une base orthonormale directe de E adaptée à la somme $E_1 \oplus \mathcal{P}$, et

$$\mathcal{M}_{(v,w)}(\varphi|_{\mathcal{P}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\varphi|_{\mathcal{P}}$ est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 6 Les endomorphismes conservant l'orthogonalité

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un espace euclidien.

1. Montrer que si u et v sont unitaires, alors $(u + v | u - v) = 0$.
2. Soit f un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité, c'est-à-dire tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x \perp y) \implies (f(x) \perp f(y)).$$

Montrer que si u et v sont unitaires, alors $\|f(u)\| = \|f(v)\|$.

3. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = k \|x\|.$$

Solution (Ex.6 – Les endomorphismes conservant l'orthogonalité)

1. $(u + v | u - v) = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 1 - 1 = 0$.
2. Soit u et v unitaires. Par 1., $(u + v) \perp (u - v)$ donc $f(u + v) \perp f(u - v)$ donc $(f(u) + f(v) | f(u) - f(v)) = 0$ donc $\|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2 = 0$, d'où $\|f(u)\| = \|f(v)\|$.
3. Soit u un vecteur unitaire quelconque et $k = \|u\| \in \mathbb{R}^+$. La question précédente montre que : $\forall v \in E, (\|v\| = 1) \implies (\|f(v)\| = k)$. Autrement dit, k ne dépend pas du vecteur unitaire choisi...

Alors :

- $\|f(0)\| = \|0\| = 0 = k \|0\|$;
- $\forall x \in E$ tel que $x \neq 0$,

$$\|f(x)\| = \left\| f\left(\|x\| \cdot \frac{1}{\|x\|} x\right) \right\| = \|x\| \left\| f\left(\frac{1}{\|x\|} x\right) \right\| = \|x\| \times k \text{ car } \frac{1}{\|x\|} x \text{ est unitaire.}$$

Remarque : $f = k \cdot \text{id}_E$ est un exemple d'un tel endomorphisme conservant l'orthogonalité.

Exercice 7 Un endomorphisme orthogonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E^2 \rightarrow \mathbb{R}, (M, N) \mapsto \text{Tr}(M^T \cdot N).$$

Soit A une matrice de E et f_A l'endomorphisme de E définie par

$$f_A : M \mapsto AM.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f_A soit un endomorphisme orthogonal de E .

Solution (Ex.7 – Un endomorphisme orthogonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

$$f_A \in \mathcal{O}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \iff \forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \langle f_A(M), f_A(N) \rangle = \langle M, N \rangle$$

$$\Longleftrightarrow \forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \text{Tr}(M^T A^T A N) = \text{Tr}(M^T N)$$

$$\Longleftrightarrow \forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \text{Tr}((M^T (A^T A - I_n) N) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \langle (A^T A - I_n) M, N \rangle = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad (\forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (A^T A - I_n) M \perp N)$$

$$\Longleftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad (A^T A - I_n) M = 0$$

$$\Longleftrightarrow A^T A - I_n = 0 \Longleftrightarrow A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$