

Exercice 1 *La loi du sauteur en hauteur - Transferts*

Dans un concours de saut, la probabilité qu'un sauteur passe la n -ème barre est $\frac{1}{n}$ et est indépendante des sauts précédents.

On note X le numéro de la dernière barre que le sauteur a franchi avant d'échouer.

1. Donner la loi de X et vérifier que $\sum_{x \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = x) = 1$.
2. Montrer que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ existent et les calculer. On observa qu'on a intérêt à commencer par calculer $\mathbb{E}(X + 1)$, puis $\mathbb{E}(X^2 - 1)$.

Solution (Ex.1 – La loi du sauteur en hauteur - Transferts)

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) \stackrel{\text{FPC}}{=} 1 \frac{1}{2} \frac{1}{3} \dots \frac{1}{n} \frac{n}{n+1} = \frac{n}{(n+1)!}$.
2. $\mathbb{E}(X + 1) \stackrel{\text{transfert}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \stackrel{\text{expon.}}{=} e$, $\mathbb{E}(X) \stackrel{\text{lin.}}{=} e - 1$.
 $\mathbb{E}(X^2 - 1) \stackrel{\text{transfert}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)n(n+1)}{(n+1)!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} \stackrel{\text{expon.}}{=} e$, $\mathbb{E}(X^2) \stackrel{\text{lin.}}{=} e + 1$,
 $\mathbb{V}(X) = 3e - e^2$.

Exercice 2 *Sans espoir ... - Absence d'espérance*

Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche.

On procède à une succession de tirages suivant le processus : à chaque tirage, on prélève une boule au hasard et on la remet accompagnée d'une autre boule de la même couleur.

On note T le temps d'attente du premier tirage d'une boule noire.

1. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T = n)$ et vérifier que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(T = n) = 1$.
2. T possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Solution (Ex.2 – Sans espoir ... - Absence d'espérance)

1. $\mathbb{P}(T = n) \stackrel{\text{FPC}}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{3} \dots \frac{n-1}{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1}$ diverge, $\mathbb{E}(X)$ n'existe pas.

Exercice 3 *Urne de Polya*

On dispose d'une urne contenant $n \geq 2$ boules dont une est rouge et les autres sont blanches.

On tire au hasard une à une des boules dans cette urne suivant le protocole :

☞ si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne pour le tirage suivant ; ☞ si la boule tirée est blanche, on l'ôte de l'urne avant de procéder au tirage suivant.

On note T le temps d'attente de la boule rouge, c'est-à-dire le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la rouge pour la première fois.

Déterminer la loi de T , son espérance et sa variance.

Solution (Ex.3 – Urne de Polya)

$T(\Omega) = \llbracket 1 ; n \rrbracket$ et

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap R_k) \stackrel{\text{FPC}}{=} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \dots \frac{n-k+1}{n-k+2} \frac{1}{n-k+1}$$

$$\mathbb{P}(T = k) = \frac{1}{n}$$

Donc $T \sim \mathcal{U}(\llbracket 1 ; n \rrbracket)$ et $\mathbb{E}(T) = (n+1)/2$, $\mathbb{V}(T) = (n^2 - 1)/12$.

Exercice 4 *Sommes très aléatoires. Décomposition en somme*

Une urne contient n ($n \in \mathbb{N}^*$) jetons numérotés de 1 à n . On tire une poignée de jetons au hasard dans l'urne. On note Y le nombre de jetons tirés et on suppose que $Y \sim \mathcal{U}(\llbracket 0 ; n \rrbracket)$. On note X la somme des numéros figurant sur les jetons tirés, en convenant que $X = 0$ si $Y = 0$. Pour k dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket$, on note X_k la variable indicatrice de l'événement « le k -ème jeton est dans la poignée tirée ».

1. Déterminer la loi de X_k et calculer $\mathbb{E}(X)$.
2. Les variables $(X_k)_{k=1}^n$ sont-elles mutuellement indépendantes ?

Solution (Ex.4 – Sommes très aléatoires. Décomposition en somme)

1. $\mathbb{P}_{[Y=j]}(X_k = 1) \stackrel{\text{dé nomb.}}{=} \frac{\binom{j-1}{n-1}}{\binom{j}{n}} = \frac{j}{n}$: sachant $[Y = j]$.

$$\mathbb{P}(X_k = 1) \stackrel{\text{FPT}}{=} \sum_{j=0}^n \frac{j}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}, X_k \sim \mathcal{B}(1/2).$$

2. $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = 1]\right) = \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{n+1} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^n = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = 1)$.

Exercice 5 *Somme de deux uniformes indépendantes - « Convolution »*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X , Y et Z trois variables indépendantes de même loi uniforme sur $\llbracket 1 ; n \rrbracket$.

1. Montrer que, pour tout k de $\llbracket 2 ; 2n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{\max(1, k-n) \leq i \leq \min(n, k-1)} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i).$$

- En déduire $\mathbb{P}(X + Y = k)$ suivant que $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ ou $k \in \llbracket n; 2n \rrbracket$.
- Montrer que $\mathbb{P}(X + Y = Z) = \frac{n-1}{n^2}$.
- Je lance trois dés justes à six faces numérotées de 1 à 6. Quelles est la probabilité que la somme de deux des numéros obtenus soit égale au troisième ?

Solution (Ex.5 – Somme de deux uniformes indépendantes - « Convolution »)

- Clairement $(X + Y)(\Omega) = \llbracket 2; 2n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 2; 2n \rrbracket$.

$$[X + Y = k] = \bigcup_{i \in X(\Omega) \text{ et } k-i \in Y(\Omega)} ([X = i] \cap [Y = k - i]).$$

Par incompatibilité de ces événements, puis indépendance des variables aléatoires,

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i \in X(\Omega) \text{ et } k-i \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i).$$

Précisons la plage de sommation :

$$(i \in X(\Omega) \text{ et } k - i \in Y(\Omega)) \iff (1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq k - i \leq n)$$

$$\iff (1 \leq i \leq n \text{ et } k - n \leq i \leq k - 1)$$

$$\iff \max(1, k - n) \leq i \leq \min(n, k - 1)$$

- $2 \leq k \leq n$ donc $\max(1, k - n) = 1$ et $\min(n, k - 1) = k - 1$,

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} = \frac{k-1}{n^2}.$$

- $n + 1 \leq k \leq 2n$ donc $\max(1, k - n) = k - n$ et $\min(n, k - 1) = n$,

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i=k-n}^n \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) = \sum_{i=k-n}^n \frac{1}{n^2} = \frac{2n - k + 1}{n^2}.$$

- À l'aide du système complet d'événements $([Z = k])_{1 \leq k \leq n}$,

$$\mathbb{P}(X + Y = Z) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}((Z = k) \cap (X + Y = Z)) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}((Z = k) \cap (X + Y = k))$$

$$\stackrel{\text{indép.}}{=} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(Z = k) \mathbb{P}(X + Y = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n^2}.$$

- Avec $n = 6$, en notant X , Y et Z les numéros des 3 dés,

$$\mathbb{P}((X + Y = Z) \cup (X + Z = Y) \cup (Y + Z = X)) \stackrel{\text{incomp.}}{=}$$

$$\mathbb{P}(X + Y = Z) + \mathbb{P}(X + Z = Y) + \mathbb{P}(Y + Z = X) = 3 \times \frac{6-1}{2 \times 6^2} = \frac{5}{24}.$$

Lorsqu'on calcule la loi de la somme de deux variables indépendantes, on parle de *convolution*. Le calcul **lorsqu'on n'utilise pas les fonctions génératrices** repose en général sur

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i \in X(\Omega) \text{ tq } k-i \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i).$$

Expliquer rigoureusement cette formule !

Exercice 6 Autour des lois binomiales et de Poisson

- Soit X et Y deux VAD indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(l)$ et $\mathcal{P}(m)$ respectivement.
 - Montrer que la loi de $X + Y$ est encore une loi de Poisson en précisant son paramètre.
 - Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $(X + Y = n)$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- Montrer que si Y est une v.a.r. suivant la loi Poisson $\mathcal{P}(l)$ et si, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi de X conditionnée par $(Y = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Solution (Ex.6 – Autour des lois binomiales et de Poisson)

- Pour $k > n$, $\mathbb{P}_{[X+Y=n]}(X = k) = 0$ (fatalement).

$$\begin{aligned} \text{Pour } 0 \leq k \leq n, \mathbb{P}_{[X+Y=n]}(X = k) &= \frac{\mathbb{P}((X = k) \cap (Y = n - k))}{\mathbb{P}(X + Y = n)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} = \frac{e^{-l} l^k}{k!} \frac{e^{-m} m^{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!}{e^{-(l+m)} l^n} = \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{l}{l+m} \right)^k \left(\frac{m}{l+m} \right)^{n-k} \dots \text{loi binomiale } \mathcal{B}\left(n, \frac{l}{l+m}\right), \text{ non ?} \end{aligned}$$

- La FPT pour le SCE $([Y = n])_{n \in \mathbb{N}}$ donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) \mathbb{P}_{[Y=n]}(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-l} \frac{l^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \frac{e^{-l}}{k!} (pl)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{[l(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} \stackrel{i=n-k}{=} \frac{e^{-l}}{k!} (pl)^k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{[l(1-p)]^i}{i!} = \frac{e^{-l} e^{l(1-p)} (lp)^k}{k!} = \\ &= \frac{e^{-lp} (lp)^k}{k!} \text{ donc } X \sim \mathcal{P}(l). \end{aligned}$$

Exercice 7 Loi de Pascal

Soit X et Y deux VAD indépendantes de loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.
Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 8 *Minimum de deux variables géométriques par deux méthodes*

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes toutes deux de loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

On pose $Z = \min(X, Y)$. L'objectif est de déterminer la loi de Z .

1. *Première méthode*

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{P}(X \geq k)$? En déduire $\mathbb{P}(Z \geq k)$ puis montrer que Z suit une loi usuelle dont on précisera le paramètre.

2. *Seconde méthode*

On lance indéfiniment simultanément deux pièces, l'une argentée et l'autre dorée, ayant toutes deux la probabilité p d'amener pile. On note A et D respectivement le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile avec la pièce argentée, respectivement avec la pièce dorée.

- Quel est la loi de A et de D ?
- Quel est la probabilité de l'événement « le premier lancer amène au moins un pile »?
- On note P le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile, sans distinction de couleur. Quel est la loi de P ?
- Conclure.

Solution (Ex.8 – Minimum de deux variables géométriques par deux méthodes)

Soit $q = 1 - p$.

1. *Première méthode*

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \geq k) = q^{k-1}$ ($k - 1$ échecs successifs).

$$\mathbb{P}(Z \geq k) = \mathbb{P}([X \geq k] \cap [Y \geq k]) \stackrel{\text{indép.}}{=} q^{k-1} q^{k-1} = q^{2k-2}.$$

$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \geq k) - \mathbb{P}(Z \geq k + 1) = q^{2k-2} - q^{2k} = (q^2)^{k-1}(1 - q^2)$ ce qui prouve que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2 = p(2 - p)$.

2. *Seconde méthode*

On lance indéfiniment simultanément deux pièces, l'une argentée et l'autre dorée, ayant toutes deux la probabilité p d'amener pile. On note A et D respectivement le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile avec la pièce argentée, respectivement avec la pièce dorée.

- La loi de A et de D est $\mathcal{G}(p)$.
- Soit B l'événement « le premier lancer amène au moins un pile ».
 $\mathbb{P}(\overline{B}) \stackrel{\text{indép.}}{=} q^2$, donc $\mathbb{P}(B) = 1 - q^2$.
- La loi de P est $\mathcal{G}(\mathbb{P}(B)) = \mathcal{G}(1 - q^2)$.

d) $P = \min(A, D)$: on retrouve le même résultat.

Exercice 9 *Maximum de deux variables géométriques*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

Soit $Z = \sup(X, Y)$.

Déterminer la loi de Z , vérifier que $\sum_{k \in \mathbb{Z}(\Omega)} \mathbb{P}(Z = k) = 1$ et calculer son espérance.

Solution (Ex.9 – Maximum de deux variables géométriques)

Posons $q = 1 - p$.

• $\mathbb{Z}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Z \leq k) = \mathbb{P}([X \leq k] \cap [Y \leq k]) \stackrel{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(X \leq k) \mathbb{P}(Y \leq k)$$

or $\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(Y > k) = (1 - p)^k$ (les k premières expériences sont des échecs), donc

$$\mathbb{P}(Z \leq k) = (1 - q^k)^2 \text{ (y compris pour } k = 0 \dots \text{ remarque pour ce qui va suivre).}$$

$$\text{Enfin, } \mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \leq k) - \mathbb{P}(Z \leq k - 1) = (1 - q^k)^2 - (1 - q^{k-1})^2$$

$$\mathbb{P}(Z = k) = 2q^{k-1} - 2q^k + q^{2k} - q^{2k-2} = 2pq^{k-1} - (q^2)^{k-1}(1 - q^2)$$

• De $\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ pour $r \in]0; 1[$, on tire :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k) = 2p \times \frac{1}{1-p} - (1 - q^2) \times \frac{1}{1 - q^2} = 1.$$

• De $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$ pour $r \in]0; 1[$ (obtenue par dérivation de la série géométrique), on tire :

$\mathbb{E}(Z)$ existe et

$$\mathbb{E}(Z) = 2p \times \frac{1}{p^2} - (1 - q^2) \times \frac{1}{(1 - q^2)^2} = \frac{2}{p} - \frac{1}{2p - p^2} = \frac{3 - 2p}{p(2 - p)}.$$

Exercice 10 *Binomiale et parité*

On dispose de $2n + 1$ jetons dont une face est noire et l'autre blanche. On lance simultanément ces jetons.

- On note B et N respectivement le nombre de faces blanches et noires obtenues. Quelle loi suivent les variables aléatoires B et N ?
- a) Expliquer pourquoi une seule des deux couleurs apparaît un nombre impair de fois.
b) X désigne la variable aléatoire égale à ce nombre impair. Calculer la loi de X .

3. a) Exprimer la fonction génératrice de X , notée G_X , à l'aide de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{2n+1} - (1-x)^{2n+1}$.
 b) En déduire l'espérance et la variance de X .

Solution (Ex.10 – Binomiale et parité)

1. B et N suivent $\mathcal{B}(2n+1, 1/2)$ (par définition de cette loi).
 2. a) En notant B et N respectivement le nombre de faces blanches et noires obtenues, $B + N = 2n + 1$ est impair, ce qui est impossible si B et N sont tous les deux pairs, ou tous les deux impairs. Donc un, et un seul, des deux nombres B et N est impair.

b) • $X(\Omega) = \{2k+1, k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$.

• Pour tout k de $\llbracket 0; n \rrbracket$, $[X = 2k+1] = [B = 2k+1] \cup [N = 2k+1]$, cette réunion étant disjointe.

Par additivité :

$$\mathbb{P}(X = 2k+1) = 2 \times \binom{2n+1}{2k+1} \frac{1}{2^{2k+1}} \frac{1}{2^{2n+1-2k-1}} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n+1}{2k+1}$$

3. a) Par la formule du binôme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k x^k = 2 \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} x^k.$$

$$\text{Donc } G_X(x) = \frac{1}{2^{2n+1}} f(x).$$

$$\text{b) } \mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{1}{2^{2n+1}} f'(1) = \frac{(2n+1)2^{2n}}{2^{2n+1}} = \frac{2n+1}{2}.$$

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = G''_X(1) = \frac{(2n+1)2n}{4},$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X^2) = \frac{2n(2n+1) + 4n + 2 - (2n+1)^2}{4} = \frac{2n+1}{4}.$$

Exercice 11 *Large sera la chute !*

On tire indéfiniment au hasard et avec remise des jetons dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n . On note $(u_i)_{i \geq 1}$ la suite infinie des numéros obtenus.

On s'intéresse au temps T_n d'attente de la première chute large définie précisément par

$[T_n = k]$ signifie que : $u_1 < u_2 < \dots < u_{k-1} \geq u_k$

1. Préciser $T_n(\Omega)$ et déterminer pour tout k de $\mathbb{N}$ la probabilité $\mathbb{P}(T_n > k)$.
 2. En déduire l'existence et la valeur de l'espérance de T_n .

Solution (Ex.11 – Large sera la chute !)

1. $T_n(\Omega) = \llbracket 2; n+1 \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$. Jusqu'au rang k inclus, il y a n^k tirages possibles. Les tirages favorables à $[T_n > k]$ sont les k -listes $(u_1, \dots, u_k)$ strictement croissantes. Une telle liste se construit en choisissant k jetons distincts et en les plaçant nécessairement en

ordre croissant. Il y a donc $\binom{n}{k}$ cas favorables. Donc $\mathbb{P}(T_n > k) = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

On observe enfin que cette formule est encore valable pour $k \in \{0, 1\}$ pour lequel $\mathbb{P}(T > k) = 1$, et pour $k \geq n+1$ pour lequel $\mathbb{P}(T > k) = 0$.

2. Comme $T_n(\Omega)$ est fini, T_n admet une espérance finie.

Comme $T_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \stackrel{\text{Newton}}{=} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$