

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques du concours CCINP, filière PC, session 2022

EXERCICE 1

Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes

Partie I - Généralités sur l'application φ

Q1. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Le polynôme B est non nul car de degré $n + 1$. D'après le théorème de division euclidienne, le reste dans la division euclidienne de AP par B est nul ou de degré strictement inférieur à $\deg(B) = n + 1$. Ainsi, $\varphi(P)$ est nul ou de degré inférieur ou égal à n , c'est-à-dire $\varphi(P)$ appartient à $\mathbb{C}_n[X]$.

Q2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$A(P_1 + \lambda P_2) = AP_1 + \lambda AP_2 = BQ_1 + R_1 + \lambda(BQ_2 + R_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + R_1 + \lambda R_2.$$

De plus, R_1 et R_2 appartiennent à $\mathbb{C}_n[X]$ donc $R_1 + \lambda R_2$ aussi. Par unicité de la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B , le quotient et le reste dans cette division euclidienne sont respectivement $Q_1 + \lambda Q_2$ et $R_1 + \lambda R_2$.

En particulier, pour tous $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\varphi(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2 = \varphi(P_1) + \lambda \varphi(P_2)$. L'application φ est donc linéaire.

Or, φ est définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ et, d'après la question 1, φ est à valeurs dans $\mathbb{C}_n[X]$.

En conclusion, φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II - Étude d'un premier exemple

Q3. On a $A \times 1 = X^2 + 2X = B \times 0 + X^2 + 2X$ et $\deg(X^2 + 2X) < \deg(B)$. Par unicité de la division euclidienne de $A \times 1$ par B , le reste dans cette division euclidienne est $X^2 + 2X$. On a donc $\varphi(1) = 2X + X^2$.

De même, on a $A \times X = X^3 + 2X^2 = B \times 1 + X^2 + X + 1$ et $\deg(X^2 + X + 1) < \deg(B)$, donc $\varphi(X) = 1 + X + X^2$.

Enfin, on a $A \times X^2 = X^4 + 2X^3$.

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 2X^3 & X^3 + X^2 - X - 1 \\ - (X^4 + X^3 - X^2 - X) & X + 1 \\ \hline X^3 + X^2 + X & \\ - (X^3 + X^2 - X - 1) & \\ \hline 2X + 1 & \end{array}$$

On a $A \times X^2 = B \times (X + 1) + 2X + 1$ et $\deg(2X + 1) < \deg(B)$, donc $\varphi(X^2) = 1 + 2X$.

En conclusion, la matrice de φ dans la base $(1, X, X^2)$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}
 \det(\lambda I_3 - M) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 & -1 \\ -1 - \lambda & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} && (C_1 \leftarrow C_1 - C_2) \\
 &= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & -3 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} && (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\
 &= (\lambda + 1) \times (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} && (\text{développement suivant } C_1) \\
 &= (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) \\
 &= (\lambda + 1)^2(\lambda - 3).
 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de M sont donc -1 et 3 , de multiplicité 2 et 1 respectivement.

Dans la matrice $M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, les colonnes sont toutes égales et non nulles, donc la matrice $M + I_3$ est de rang 1. D'après le théorème du rang, son noyau est donc de dimension 2. De plus, on a $(M + I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $(M + I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\text{Ker}(M + I_3)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre de deux vecteurs dans $\text{Ker}(M + I_3)$, qui est de dimension 2.

Une base du sous-espace propre de M associé à la valeur propre -1 est donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Par ailleurs, puisque 3 est valeur propre simple de M , le sous-espace propre associé est de dimension 1. Or, dans la matrice $M - 3I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, les colonnes vérifient la relation

$C_1 + 2C_2 + C_3 = 0$ donc le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\text{Ker}(M - 3I_3)$. Ce vecteur étant non nul,

le sous-espace propre de M associé à la valeur propre 3 est donc $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Q5. D'après la question 4, pour chacune des valeurs propres de M , la dimension du sous-espace propre associé est égale à la multiplicité de la valeur propre. La matrice M est donc diagonalisable, donc l'endomorphisme φ est diagonalisable.

En particulier, la concaténation d'une base de chaque sous-espace propre de φ constitue une base de $\mathbb{C}_2[X]$. D'après les calculs de la question 4, la famille $(1 - X, 1 - X^2, 1 + 2X + X^2)$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ .

Partie III - Étude d'un second exemple

Q6. On a $A \times 1 = B \times 0 + \alpha + \beta X + \gamma X^2$ et $\deg(\alpha + \beta X + \gamma X^2) < \deg(B)$. Par unicité de la division euclidienne de $A \times 1$ par B , le reste dans cette division euclidienne est $\alpha + \beta X + \gamma X^2$. On a donc $\varphi(1) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

De même, on a $A \times X = \alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3 = B \times \gamma + \alpha X + \beta X^2$ et $\deg(\alpha X + \beta X^2) < \deg(B)$, donc $\varphi(X) = \alpha X + \beta X^2$. Enfin, on a $A \times X^2 = \alpha X^2 + \beta X^3 + \gamma X^4 = B \times (\beta + \gamma X) + \alpha X^2$ et $\deg(\alpha X^2) < \deg(B)$, donc $\varphi(X^2) = \alpha X^2$.

Ainsi, la matrice de φ dans la base $(1, X, X^2)$ est $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Q7. La matrice T est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc T admet pour unique valeur propre α , de multiplicité 3. Alors, la matrice T est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre $\text{Ker}(T - \alpha I_3)$ est de dimension 3, si et seulement si $T - \alpha I_3$ est la matrice nulle, si et seulement si $\beta = \gamma = 0$, si et seulement si A est constant.

En conclusion, l'endomorphisme φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

Q8. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$D(x_j) = P(x_j) - \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i(x_j) = P(x_j) - \left(P(x_j) \times 1 + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n P(x_i) \times 0 \right) = 0.$$

Les nombres x_0, \dots, x_n sont donc des racines du polynôme D .

Q9. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Puisque les polynômes L_0, \dots, L_n appartiennent à $\mathbb{C}_n[X]$, il en est de même pour le polynôme D . Ainsi, le polynôme D est de degré inférieur ou égal à n et possède au moins $n + 1$

racines distinctes, il s'agit donc du polynôme nul. On a ainsi $P = \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i$.

Q10. D'après la question 9, tout polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ est combinaison linéaire de L_0, \dots, L_n donc la famille (L_0, \dots, L_n) engendre $\mathbb{C}_n[X]$. Or, cette famille est constituée de $n + 1$ vecteurs et $\mathbb{C}_n[X]$ est de dimension $n + 1$. La famille (L_0, \dots, L_n) est donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q11. Soit $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. On a $AL_k = BQ_k + R_k$ donc

$$A(x_j)L_k(x_j) = B(x_j)Q_k(x_j) + R_k(x_j) = R_k(x_j)$$

car x_j est racine de B par définition. Étant donné la valeur de $L_k(x_j)$, on a donc

$$R_k(x_j) = 0 \text{ si } j \neq k \text{ et } R_k(x_k) = A(x_k).$$

Q12. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Le polynôme $\varphi(L_k)$ appartient à $\mathbb{C}_n[X]$. D'après la question 9, on a donc

$$\varphi(L_k) = R_k = \sum_{j=0}^n R_k(x_j)L_j = R_k(x_k)L_k + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n R_k(x_j)L_j = A(x_k)L_k$$

en utilisant la question 11. On a donc $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$.

Q13. D'après la question 10, la famille (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et, d'après la question 12, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, L_k est un vecteur propre de φ (car non nul) associé à la valeur propre $A(x_k)$. La famille (L_0, \dots, L_n) étant une base de $\mathbb{C}_n[X]$ formée de vecteurs propres de φ , l'endomorphisme φ est diagonalisable. De plus, ses valeurs propres sont $A(x_0), \dots, A(x_n)$.

EXERCICE 2

Étude de séries de pile ou de face

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Q14. D'après le cours, la série entière $\sum_{k \geq 0} x^k$ a un rayon de convergence égal à 1 et a pour somme la

fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Q15. D'après le cours, la somme d'une série entière de la variable réelle est de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et les dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme. En particulier, soit $x \in]-1, 1[$. La série de terme général kx^{k-1} , $k \in \mathbb{N}^*$, converge de somme $\frac{1}{(1-x)^2}$. En multipliant par x et en constatant que le terme d'indice $k = 0$ est nul, on en conclut que

la série $\sum_{k \geq 0} kx^k$ converge et qu'on a $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Q16. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'évènement $(L_1 = k)$ est réalisé si et seulement si la première série est de longueur k , c'est-à-dire les k premiers lancers donnent le même résultat et le $(k+1)$ -ième lancer donne un résultat différent. On a donc

$$\boxed{(L_1 = k) = (P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1})}.$$

Q17. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les évènements $P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}$ et $F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}$ étant incompatibles, on a

$$P(L_1 = k) = P(P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}) + P(F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}).$$

Par indépendance des lancers, on a alors

$$P(L_1 = k) = P(P_1) \times \dots \times P(P_k) \times P(F_{k+1}) + P(F_1) \times \dots \times P(F_k) \times P(P_{k+1}) = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2}{2^{k+1}}$$

d'où $P(L_1 = k) = 2^{-k}$.

Q18. Par définition, la variable aléatoire L_1 prend ses valeurs dans \mathbb{N} . La série de terme général $P(L_1 = k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge donc de somme 1. On a alors $P(L_1 = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}$. Or, $\frac{1}{2}$ appartient à l'intervalle $] -1, 1[$ donc, d'après la question 14, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

On a ainsi $P(L_1 = 0) = 0$.

Q19. D'après la question 17, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $kP(L_1 = k) = k \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Cette égalité est aussi valable

lorsque $k = 0$. Or, d'après la question 15, la série $\sum_{k \geq 0} k \left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge de somme $\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$.

En particulier, la série de terme général $kP(L_1 = k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge donc, par positivité, converge absolument de somme 2, ce qui signifie que L_1 admet une espérance égale à 2. Ainsi, en moyenne, la première série dans la suite de lancers est de longueur 2.

Partie II - Étude du nombre de séries

Q20. La variable aléatoire N_1 représente le nombre de séries apparues en un lancer, elle ne peut donc prendre que la valeur 1.

La variable aléatoire N_2 représente le nombre de séries apparues lors des deux premiers lancers, elle prend donc la valeur 1 si les 2 premiers lancers donnent le même résultat, la valeur 2 s'ils donnent des résultats différents. On a

$$\begin{aligned} P(N_2 = 1) &= P((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)) \\ &= P(P_1 \cap P_2) + P(F_1 \cap F_2) \quad (\text{incompatibilité}) \\ &= P(P_1)P(P_2) + P(F_1)P(F_2) \quad (\text{indépendance}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On a donc nécessairement $P(N_2 = 2) = 1 - P(N_2 = 1) = \frac{1}{2}$.

En conclusion, N_1 suit la loi certaine de valeur 1 et N_2 suit la loi uniforme sur $\{1, 2\}$.

Q21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Au cours des n premiers lancers, au moins une série apparaît (celle contenant le résultat du premier lancer) et, au maximum, n séries apparaissent (car chaque série contient au moins un résultat). La variable aléatoire N_n prend donc ses valeurs dans l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Q22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Si l'évènement $P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, alors le n -ième et le $(n+1)$ -ième lancers donnent le même résultat, donc le $(n+1)$ -ième résultat contribue à la série contenant le n -ième résultat et on a $N_n = N_{n+1}$. On a donc l'égalité d'évènements

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}.$$

Puisque les évènements $(N_n = k)$ et P_n sont indépendants du $(n+1)$ -ième lancer, on en déduit que

$$P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = P((N_n = k) \cap P_n)P(P_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap P_n).$$

Q23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les évènements $P_n \cap P_{n+1}$, $F_n \cap F_{n+1}$, $F_n \cap P_{n+1}$ et $P_n \cap F_{n+1}$ décrivent les quatre résultats possibles pour les n -ième et $(n+1)$ -ième lancers. Ils sont donc deux à deux incompatibles et ont pour réunion l'évènement certain, formant ainsi un système complet d'évènements.

Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales, on a donc

$$\begin{aligned} P(N_{n+1} = k) &= P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) + P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) \\ &\quad + P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) + P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap P_n) + \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap F_n) \\ &\quad + \frac{1}{2}P((N_n = k-1) \cap F_n) + \frac{1}{2}P((N_n = k-1) \cap P_n) \quad (\text{question 22}) \\ &= \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap (P_n \cup F_n)) + \frac{1}{2}P((N_n = k-1) \cap (P_n \cup F_n)) \quad (\text{incompatibilité}) \end{aligned}$$

d'où $P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(N_n = k) + \frac{1}{2}P(N_n = k-1)$.

Q24. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 23, on a

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} P(N_{n+1} = k)x^k = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}P(N_n = k) + \frac{1}{2}P(N_n = k-1) \right) x^k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k)x^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k-1)x^k. \end{aligned}$$

Or, on a $P(N_n = n + 1) = 0$ donc $\sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k)x^k = \sum_{k=1}^n P(N_n = k)x^k = G_n(x)$. Par ailleurs, en effectuant un changement d'indice dans la seconde somme, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k - 1)x^k = \sum_{j=0}^n P(N_n = j)x^{j+1} = x \sum_{j=0}^n P(N_n = j)x^j = xG_n(x)$$

car $P(N_n = 0) = 0$. On en conclut qu'on a $G_{n+1}(x) = \frac{1}{2}G_n(x) + \frac{1}{2}xG_n(x) = \frac{1+x}{2}G_n(x)$.

Q25. Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(G_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1+x}{2}$ et de premier terme $G_1(x) = x$.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(x) = x \left(\frac{1+x}{2} \right)^{n-1}$.

Q26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme définissant G_n étant finie, la fonction G_n est dérivable sur \mathbb{R} donc, d'après le cours, N_n admet une espérance égale à $G'_n(1)$.

Soit un entier $n \geq 2$. D'après la question 25, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G'_n(x) = \left(\frac{1+x}{2} \right)^{n-1} + x \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1+x}{2} \right)^{n-2}$$

donc, en particulier, on a $G'_n(1) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$. Lorsque $n = 1$, on a $G_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $G'_1(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $E(N_n) = G'_n(1) = \frac{n+1}{2}$.

Q27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que la variable aléatoire N_n prend ses valeurs dans l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. La fonction G_n est polynomiale sur \mathbb{R} . Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n P(N_n = k)x^k.$$

Par ailleurs, d'après la question 25, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G_n(x) = x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{x}{2} \right)^k \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{1}{2^{n-1}} x^{k+1} = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{2^{n-1}} x^k.$$

Par unicité des coefficients d'une fonction polynomiale sur un intervalle, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

on a $P(N_n = k) = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{k-1}$. Cela détermine la loi de N_n .

EXERCICE 3

La constante d'Euler

Partie I - Construction de la constante d'Euler

Q28. Soit un entier $n \geq 2$. On a

$$\Delta_n = u_n - u_{n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \ln(n-1) \right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, on a donc

$$\Delta_n = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En notant $a = \frac{1}{2}$, on a donc $\Delta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{a}{n^2}$.

Q29. La série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge et, quand $n \rightarrow +\infty$, on a $-\Delta_n \sim \frac{1}{2n^2}$. En particulier, il existe un rang à partir duquel $-\Delta_n$ est positif et, d'après le théorème de comparaison des séries positives, la série de terme général $-\Delta_n$ converge. En multipliant par -1 , on en conclut que

la série $\sum_{n \geq 2} \Delta_n$ converge.

Q30. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage, on a $u_n - u_1 = \sum_{k=2}^n \Delta_k$, donc $u_n = u_1 + \sum_{k=2}^n \Delta_k$. D'après la question 29, on en conclut que

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Partie II - Expression intégrale de la constante d'Euler

Q31. Soit $t \in]0, +\infty[$. L'entier $n_0 = [t] + 1$ est non nul et, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $n > t$ donc

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t).$$

La propriété annoncée est ainsi bien démontrée.

Q32. Soit $t \in]0, +\infty[$. D'après la question précédente, en reprenant les mêmes notations, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $f_n(t) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \ln(t)$. Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \sim -\frac{t}{n}$ donc, par continuité de \exp , $f_n(t)$ admet une limite égale à $e^{-t} \ln(t)$.

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$.

Q33. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, +\infty[$.

— Si on a $t \geq n$, alors on a $|f_n(t)| = 0 \leq e^{-t} |\ln(t)|$.

— Si on a $t < n$, alors on a $0 < \frac{t}{n} < 1$ donc $-\frac{t}{n}$ appartient à l'intervalle $] -1, +\infty[$. D'après

l'inégalité de concavité de la fonction \ln , on a donc $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$. Par croissance et

positivité de la fonction $x \mapsto e^{nx}$ sur \mathbb{R} , on en déduit qu'on a $0 < \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$. On a alors

$$|f_n(t)| = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n |\ln(t)| \leq e^{-t} |\ln(t)|.$$

Dans les deux cas, on a montré qu'on a

$$|f_n(t)| \leq e^{-t} |\ln(t)|.$$

Q34. La fonction $f : t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ est continue donc continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
 Quand $t \rightarrow +\infty$, on a $\ln(t) = o(e^{t/2})$ d'après le théorème des croissances comparées, donc $|f(t)| = o(e^{-t/2})$. La fonction $t \mapsto e^{-t/2}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, par comparaison, la fonction f l'est également.

Quand $t \rightarrow 0$, e^{-t} tend vers 1 et $\ln(t)$ tend vers $-\infty$ donc on a $|f(t)| \sim -\ln(t)$. Or, d'après le cours, l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge, donc la fonction positive $-\ln$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$. Par comparaison, f est donc aussi intégrable sur $]0, 1]$.

En conclusion, f est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ donc f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q35. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue par morceaux car continue sur l'intervalle $]0, n[$.
 Quand $t \rightarrow 0$, on a $|f_n(t)| \sim -\ln(t)$ en procédant comme dans la question 34. Par comparaison, l'intégrale $\int_0^{n/2} f_n(t) dt$ converge absolument donc converge.

Par ailleurs, quand $t \rightarrow n^-$, $f_n(t)$ admet une limite égale à 0. Puisque la fonction f_n s'annule sur $[n, +\infty[$, elle est donc continue en n . L'intégrale $\int_{n/2}^n f_n(t) dt$ est donc convergente comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Enfin, la fonction f_n s'annulant sur l'intervalle $[n, +\infty[$, l'intégrale $\int_n^{+\infty} f_n(t) dt$ converge.

On peut ainsi en conclure que l'intégrale I_n converge.

Q36. On applique le théorème de convergence dominée.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ (et même continue).
- D'après la question 32, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $f : t \mapsto e^{-t} \ln(t)$.
- La fonction f est continue par morceaux car continue sur $]0, +\infty[$.
- D'après la question 33, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0, +\infty[$, on a $|f_n(t)| \leq e^{-t} |\ln(t)|$. De plus, d'après la question 34, la fonction $t \mapsto e^{-t} |\ln(t)|$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt.$$

Q37. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe $\varepsilon \in]0, 1[$. Les fonctions $u \mapsto u^{n+1} - 1$ et $u \mapsto \ln(1 - u)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[0, 1 - \varepsilon]$, de dérivée respective $u \mapsto (n + 1)u^n$ et $u \mapsto -\frac{1}{1 - u}$. D'après le théorème d'intégration par parties, on a donc

$$\int_0^{1-\varepsilon} (n + 1)u^n \ln(1 - u) du = [(u^{n+1} - 1) \ln(1 - u)]_0^{1-\varepsilon} - \int_0^{1-\varepsilon} \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} du$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{1-\varepsilon} (n + 1)u^n \ln(1 - u) du = ((1 - \varepsilon)^{n+1} - 1) \ln(\varepsilon) - \int_0^{1-\varepsilon} \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} du. \quad (1)$$

Or, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $((1 - \varepsilon)^{n+1} - 1) \ln(\varepsilon) = -\varepsilon \left(\sum_{k=0}^n (1 - \varepsilon)^k \right) \ln(\varepsilon)$ admet une limite égale à 0 d'après

le théorème des croissances comparées. Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 (n + 1)u^n \ln(1 - u) du$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^1 \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} du$ converge.

Autrement dit, $\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ converge si et seulement si l'intégrale } \int_0^1 \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} du \text{ converge.}}$

Or, la fonction $u \mapsto \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1}$ est continue sur $[0, 1[$. De plus, pour tout $u \in [0, 1[$, on a $\frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} = \sum_{k=0}^n u^k$ donc la fonction $u \mapsto \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1}$ admet une limite en 1 égale à $n + 1$ et se prolonge par continuité sur le segment $[0, 1]$. En tant qu'intégrale d'une fonction prolongeable par continuité sur un segment, l'intégrale $\int_0^1 \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} du$ converge. L'équivalence démontrée précédemment permet de conclure que $\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ est convergente.}}$

De plus, en faisant tendre ε vers 0 dans la relation (1), on a $(n + 1)J_n = 0 - \int_0^1 \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} du$, d'où

la relation $\boxed{J_n = -\frac{1}{n + 1} \int_0^1 \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} du.}$

Par linéarité de l'intégrale, on a aussi

$$J_n = -\frac{1}{n + 1} \int_0^1 \sum_{k=0}^n u^k du = -\frac{1}{n + 1} \sum_{k=0}^n \int_0^1 u^k du = -\frac{1}{n + 1} \sum_{k=0}^n \left[\frac{u^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = -\frac{1}{n + 1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}.$$

Par changement d'indice, on obtient l'égalité $\boxed{J_n = -\frac{1}{n + 1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.}$

Q38. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction f_n est continue donc continue par morceaux sur l'intervalle $]0, n[$.
- La fonction $\varphi : u \mapsto n(1 - u)$ est de classe \mathcal{C}^1 et réalise une bijection strictement décroissante de $]0, 1[$ vers $]0, n[$.

D'après le théorème de changement de variable, les intégrales $\int_0^n f_n(t) dt$ et $\int_0^1 f_n(\varphi(u))(-\varphi'(u)) du$ sont de même nature et, en cas de convergence, sont égales. Or, d'après la question 35, l'intégrale $I_n = \int_0^n f_n(t) dt$ est convergente. Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 f_n(\varphi(u))(-\varphi'(u)) du$ converge et on a

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 f_n(\varphi(u))(-\varphi'(u)) du = \int_0^1 u^n \ln(n(1 - u))n du \\ &= n \int_0^1 u^n (\ln(n) + \ln(1 - u)) du = n \ln(n) \int_0^1 u^n du + n \int_0^1 u^n \ln(1 - u) du \end{aligned}$$

d'où $\boxed{I_n = \frac{n}{n + 1} \ln(n) + nJ_n.}$

Q39. D'après les questions 37 et 38, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$I_n = \frac{n}{n + 1} \ln(n) - \frac{n}{n + 1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{n}{n + 1} \left(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n + 1} \right) = -\frac{n}{n + 1} \left(u_n + \frac{1}{n + 1} \right). \quad (2)$$

Or, par définition, γ est la limite de u_n quand $n \rightarrow +\infty$. De plus, $\frac{1}{n + 1}$ tend vers 0, $\frac{n}{n + 1}$ tend vers 1 et, d'après la question 36, I_n tend vers $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$. En passant à la limite dans la relation

(2), on obtient ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt = -\gamma$, d'où $\boxed{\gamma = -\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt.}$