

**Exercice 1**

Soit  $\alpha \in ]2; +\infty[$ .

1. Soit  $q \in \mathbb{N}^*$ . À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer que

$$\sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)q^{\alpha-1}}.$$

2. En déduire que la famille  $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est sommable.

**Solution (Ex.1 – )**

1.  $\forall n \geq q+1, \forall t \in [n-1; n], \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$ , donc  $\frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^\alpha} dt$ , donc (Riemann et  $\alpha > 1$ )  $\sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_q^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{(\alpha-1)q^{\alpha-1}}$ .

$$2. \sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_q \sum_p \frac{1}{(p+q)^\alpha} \stackrel{n=q+p}{=} \sum_q \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Comme  $\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)q^{\alpha-1}}$  existe et est finie (Riemann et  $\alpha-1 > 1$ ),

par la comparaison de termes généraux positifs de la question 1.,

$\sum_q \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  est finie. Cette finitude prouve la sommabilité de la famille  $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ .

**Exercice 2**

Le but de l'exercice est d'établir pour tout  $x$  réel tel que  $|x| < 1$  l'égalité

$$(E) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}.$$

Soit  $x$  tel que  $|x| < 1$ .

1. Justifier la finitude du membre de gauche de (E) et montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} x^{p(2n-1)}.$$

2. Justifier la sommabilité de la famille  $(x^{p(2n-1)})_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ .  
3. En déduire l'égalité (E).

**Solution (Ex.2 – )**

1.  $x^{2n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $\frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x^{2n-1}$  : par équivalence de termes généraux de signe constant (celui de  $x...$ ) et convergence de la série géométrique de raison  $x^2 \in [0; 1[$ , le premier membre de (E) est finie.

Comme  $|x^{2n-1}| < 1$ ,  $\sum_{p=1}^{+\infty} x^{p(2n-1)} = \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}$ , donc  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} =$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} x^{p(2n-1)}.$$

2.  $|x^{p(2n-1)}| \leq |x|^{p(2n-1)}$  et la question montre que  $(|x|^{p(2n-1)})_{n,p}$  est sommable, donc la famille  $(x^{p(2n-1)})_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est sommable.

3. Permutons les sommes par le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} x^{p(2n-1)} &= \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} x^{p(2n-1)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left( x^{-p} \sum_{n=1}^{+\infty} (x^{2p})^n \right) = \\ \sum_{p=1}^{+\infty} x^{-p} \frac{x^{2p}}{1-x^{2p}} &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{1-x^{2p}}, \text{ ce qui prouve (E).} \end{aligned}$$

**Exercice 3**

On admet que la comparaison série-intégrale de l'exercice 1 permet de montrer

que, pour  $\alpha > 1$ , le reste  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  vérifie

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Montrer que, lorsque cela a un sens,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

**Solution (Ex.3 – )**

Par l'équivalent,  $\sum_n R_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 2$ . Prenons  $\alpha > 2$ .

Les termes généraux étant positifs, on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{0 \leq n < k} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

#### Exercice 4

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de réels positifs ou nuls. On suppose que la série  $\sum_n a_n$  converge.

Montrer que  $\sum_{k=1}^{+\infty} k \left( \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} \right)$  existe et calculer sa valeur en fonction de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

**Solution (Ex.4 – )**

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left( \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} \right) &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{k a_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k a_n}{n(n+1)} = \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{a_n}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k \right) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \text{ la finitude de cette dernière somme} \\ \text{et la positivité des termes généraux assurant l'existence et l'égalité.} \end{aligned}$$

#### Exercice 5

On pose, pour tout  $n \geq 2$ ,  $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n}$  (fonction « zêta » de Riemann). On pourra utiliser la majoration de l'exercice 1.

Montrer que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (\zeta(n) - 1) = \frac{1}{2}.$$

**Solution (Ex.5 – )**

D'après l'exercice 1.,  $\zeta(n) - 1 = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \leq \frac{1}{n-1}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (\zeta(n) - 1) &= \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{-1}{k} \right)^n = \\ \sum_{k=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{1 - (-1/k)} - 1 + \frac{1}{k} \right) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \left( \frac{k}{k+1} - 1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ \frac{1}{2} \text{ par télescopage.} \end{aligned}$$

#### Exercice 6

Justifier rigoureusement l'équivalent de  $R_n$  fourni en début de l'exercice 3.

**Solution (Ex.6 – )**

On raffine le raisonnement de l'exercice 1 en minorant  $\frac{1}{n^\alpha}$  par  $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$ .

$$\text{Alors } \int_{q+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_q^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt,$$

$$\text{donc } \frac{1}{(\alpha-1)q^{\alpha-1}} \leq \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)q^{\alpha-1}}.$$

Or le minorant et le majorant sont équivalents lorsque  $q$  tend vers  $+\infty$ , donc

$$\sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \underset{q \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)q^{\alpha-1}} \dots$$