

Exercice 1 Étude d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

On pose pour tout $x \in [0; +\infty[$ $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}$.

- Définition** - Justifier que f est définie sur $[0; +\infty[$.
- Continuité** - Justifier que f est continue sur $[0; +\infty[$.
- Variation sans dérivation** - Montrer que f est décroissante strictement.
- Dérivabilité** - Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et retrouver ses variations.
- Limite** - Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 2 Un calcul de l'intégrale de Dirichlet

- Justifier que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt} dt$ est définie et continue sur $[0; +\infty[$.
- Déterminer sa limite en $+\infty$.
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$ et calculer f'' .
- En déduire f sur $]0; +\infty[$, puis $f(0)$.
- En déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet : $D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Solution (Ex.2 - Un calcul de l'intégrale de Dirichlet)

- Soit $g : [0; +\infty[\times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt}$ et $h :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$.
 - Pour $x \in [0; +\infty[, t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.
 - Pour $t \in]0; +\infty[, x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $[0; +\infty[$.
 - $\forall (x, t) \in [0; +\infty[\times]0; +\infty[, |g(x, t)| \leq h(t)$, où h est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$, avec
 - $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \frac{1}{2}$ car $1 - \cos t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$, donc $\int_0^1 h(t) dt$ converge (faussetment impropre),
 - $\forall t \geq 1, 0 \leq h(t) \leq \frac{2}{t^2}$ donc $\int_1^{+\infty} h(t) dt$ converge, donc h est continue par morceaux et intégrable sur $]0; +\infty[$.

Ainsi, f est définie et continue sur $[0; +\infty[$.

- On l'a corrigée en TD grâce au théorème de convergence dominée. Voici une autre proposition.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$, il existe T tel que $\forall t \geq T, h(t) \leq 1$.

Comme h est continue sur $]0; T]$ et est prolongeable en une fonction continue sur $[0; T]$, h est majorée sur $[0; T]$.

Donc h est majorée sur $]0; +\infty[$.

Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in]0; +\infty[, 0 \leq h(t) \leq M$.

$\forall x \in [0; +\infty[, \forall t \in]0; +\infty[, 0 \leq g(x, t) \leq M e^{-xt}$.

Par croissance de l'intégrale, $\forall x \in [0; +\infty[, 0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x}$.

Par encadrement, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

- Pour $t \in]0; +\infty[, x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$.

Regardons les dérivées par rapport à x de g :

$$\bullet \forall x \in]0; +\infty[, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{\cos t - 1}{t} e^{-xt} \right| = \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} h_1(t)$$

h_1 est prolongeable par continuité en 0 (limite nulle) et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$ donc continue et intégrable sur $]0; +\infty[$.

$$\bullet \forall x \in]0; +\infty[, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = (1 - \cos t) e^{-xt} \leq 2e^{-xt}$$

Plaçons-nous sur $[a; +\infty[\subset]0; +\infty[$ afin de majorer par une quantité indépendante de x .

$$\forall x \in [a; +\infty[, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = (1 - \cos t) e^{-xt} \leq 2e^{-at}$$

et $h_2 : t \mapsto 2e^{-at}$ est intégrable d'après le cours car $a > 0$.

Par le théorème de dérivation, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout $[a; +\infty[\subset]0; +\infty[$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$ et f'' se calcule par dérivation sous l'intégrale.

Soit $x \in]0; +\infty[$.

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos t) e^{-xt} dt = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \cos t e^{-xt} dt = \frac{1}{x} -$$

$$\mathcal{R}e \left(\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt \right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \mathcal{R}e \left(\frac{1}{x-i} \right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

4. Pour $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + k = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + k \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} k.$$

Or on démontre comme en 2. que f' est tend vers 0 en $+\infty$. Donc $k = 0$

$$\text{et } f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1).$$

En primitivant à nouveau grâce à des intégrations par parties,

$$f(x) = x \ln x - x - \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1) + x - \text{Arctan}(x) + \kappa$$

$$f(x) = x \ln x - \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1) - \text{Arctan}(x) + \kappa$$

Déterminons κ grâce à la limite en $+\infty$:

$$\ln(x^2 + 1) = \ln(x^2) + \ln(1 + 1/x^2) = 2 \ln(x) + 1/x^2 + o(1/x^2)$$

$$\text{D'où : } f(x) = -\frac{1}{2x} + o(1/x) - \text{Arctan}(x) + \kappa \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2} + \kappa$$

$$\text{Or d'après 2., } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \text{ donc } \kappa = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Finalement : } f(x) = x \ln x - \frac{x}{2} \ln(x^2 + 1) - \text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Comme } f \text{ est continue en } 0, f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$$5. \frac{\pi}{2} = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt, \text{ donc}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3 Expression explicite d'une fonction intégrale

$$\text{Soit : } f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Donner une expression intégrale de f' , puis la calculer.
3. En déduire une expression simple de f (i.e. sans intégrale).

Solution (Ex.3 – Expression explicite d'une fonction intégrale)

1. Soit $g : \mathbb{R} \times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$.
 $f(0)$ existe et vaut 0.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $]0; +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 car $g(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} x$, et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$ car $t^2 g(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Donc $f(x)$ existe.

f est définie sur $\mathbb{R}$.

- Pour $t \in]0; +\infty[$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \cos(xt) e^{-t}.$$

- Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]0; +\infty[, \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t},$$

or $t \mapsto e^{-t}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0; +\infty[$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. En dérivant sous l'intégrale (valide d'après 1.) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \mathcal{R}e \left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} dt \right) = \mathcal{R}e \left(\frac{1}{ix-1} \right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

3. Comme $f(0) = 0 = \text{Arctan}(0)$ et $f' = \text{Arctan}'$, on a $f = \text{Arctan}$.

Exercice 4 Un calcul de l'intégrale de Gauss

Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = f(x^2).$$

1. Justifier que f de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer f' .
2. Déterminer $f(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Montrer que $x \mapsto g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss : $G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Solution (Ex.4 – Un calcul de l'intégrale de Gauss)

Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = f(x^2).$$

1. Soit $h : \mathbb{R} \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$.

À $t \in [0; 1]$ fixé, $x \mapsto h(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Comme aucune intégrale n'est impropre car nous travaillons avec des fonctions continues (de t) sur le segment $[0; 1]$ donc bornées, le théorème de transfert de la classe s'applique.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt = e^{-x} \int_0^1 e^{-xt^2} dt.$$

2. • $f(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

• Soit $x \geq 0$. $\forall t \in [0; 1], \quad 0 \leq \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x}$, donc par croissance de l'intégrale $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

3. Soit $j : x \mapsto g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$.

Par composition, j est dérivable et : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$j'(x) = 2xf'(x^2) - 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt - 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Posons $u = xt$ dans la première intégrale :

$$j'(x) = 2xe^{-x^2} \frac{1}{x} \int_0^x e^{-u^2} du - 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 0$$

Donc j est constante sur $\mathbb{R}$.

4. $j(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} g(0) = f(0) = \frac{\pi}{4}$, donc j est constante égale à $\frac{\pi}{4}$.

Or $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} j(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Donc $\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}$, et comme $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \geq 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 5 Explicitation grâce à une équation différentielle

Soit, pour $x \in \mathbb{R}$ et sous réserve de définition, $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. On admet que l'intégrale de Gauß $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ vaut $\sqrt{\pi}$. Déterminer une expression explicite (i.e. sans intégrale) de f .

Solution (Ex.5 – Explicitation grâce à une équation différentielle)

1. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto e^{-t^2} \cos(xt)$.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^{-t^2}$. φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ par parité et car $\varphi(t) = o(e^{-t})$ en $+\infty$ et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

① Pour $t \in \mathbb{R}, x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

② Pour $x \in \mathbb{R}, t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue et dominée par φ .

③ Pour $x \in \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -t \sin(xt) e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

④ $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq |t| \varphi(t)$ or $t \mapsto |t| \varphi(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue, paire et vérifiant $|t| \varphi(t) = o(1/t^2)$ en $+\infty$.

Par le théorème de dérivation sous l'intégrale, f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$.

En observant que $\frac{de^{-t^2}}{dt} = -2te^{-t^2}$, une intégration par parties s'impose.

$u : t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{2}$ et $v : t \mapsto \sin(xt)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(t)v(t) = 0$ car $|u(t)v(t)| \leq u(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\frac{x}{2} f(x)$. f est solution de l'équation différentielle d'ordre 1 : $y' + \frac{x}{2} y = 0$.

3. Les solutions de cette équation homogène sont les fonction $x \mapsto Ke^{-x^2/4}$ avec $K \in \mathbb{R}$ arbitraire.

L'énoncé donne la condition initiale $f(0) = \sqrt{\pi}$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\pi}e^{-x^2/4}$.

Exercice 6 Calcul d'une intégrale à deux paramètres

1. Soit $0 < \alpha \leq \beta$. Montrer que $I(\alpha, \beta) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt$ existe.
2. Dans cette question, on se propose de calculer $I(\alpha, \beta)$ à l'aide d'une fonction définie par une intégrale.
On pose, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f(x) = I(1, x)$.
 - a) Montrer que f est dérivable sur $[1; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $[1; +\infty[$.
 - b) En déduire une expression explicite de f , puis de $I(\alpha, \beta)$.

Solution (Ex.6 – Calcul d'une intégrale à deux paramètres)

1. Soit $0 < \alpha \leq \beta$.
 - $t \mapsto \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}$ est continue sur $]0; +\infty[$.
 - Au voisinage de 0, $\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} = \frac{1 - \alpha t + o(t) - 1 + \beta t - o(t)}{t} = \beta - \alpha + o(1) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \beta - \alpha$ donc $I(\alpha, \beta)$ est faussement impropre donc convergente en 0.
 - $t^2 \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} = o(1/t^2)$ donc $I(\alpha, \beta)$ converge en $+\infty$ par domination.
 Donc pour $0 < \alpha \leq \beta$, $I(\alpha, \beta) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt$ existe.
2. On pose, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f(x) = I(1, x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$.
 - a) Soit $g : [1; +\infty[\times]0; +\infty[, (x, t) \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$.
C'est parti pour la dérivation $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale...
 - ① Pour $t \in]0; +\infty[, x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; +\infty[$.

- ② Pour $x \in [1; +\infty[, t \mapsto g(x, t)$ est continue intégrable sur $]0; +\infty[$ par la première question (c'est $I(x, 1)$).

- ③ Pour $x \in [1; +\infty[, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x} g(x, t) = e^{-xt}$ est continue (et même déjà intégrable).

- ④ $\forall (x, t) \in [1; +\infty[\times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial g}{\partial x} g(x, t) \right| \leq e^{-t}$ avec $t \mapsto e^{-t}$ intégrable.

Par le théorème de dérivation, f est dérivable sur $[1; +\infty[$ et : $\forall x \in [1; +\infty[, f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$.

- b) En primitivant, et en observant que $f(1) = 0$, on a : $\forall x \in [1; +\infty[, f(x) = \ln(x)$.
Soit $0 < \alpha \leq \beta$. Posons $u = \alpha t$, changement $\mathcal{C}^1$ strictement monotone dans $I(\alpha, \beta)$.

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt \stackrel{u=\alpha t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-\beta u/\alpha}}{u} du = f(\beta/\alpha) = \ln \frac{\beta}{\alpha} = \ln \beta - \ln \alpha.$$

Exercice 7 Étude d'une fonction

Soit, sous réserve d'existence, $f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$.

1. Montrer que f est définie sur $] -1; +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1; +\infty[$.
3. Montrer que $h :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)}$ est bornée et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
4. En déduire $f(x)$ pour tout $x > -1$.

Solution (Ex.7 – Étude d'une fonction)

1. Soit $g :] -1; +\infty[\times]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$.
Soit $x \in] -1; +\infty[$. $t \mapsto g(x, t)$ est continue et positive sur $]0; 1[$.
De plus, $g(x, t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} 1$ donc l'intégrale définissant $f(x)$ est faussement impropre donc convergente en 1.

Enfin, $g(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-t^x}{\ln t}$ donc $g(x, t) = o(t^x)$ en 0, donc $g(x, t) = o\left(\frac{1}{t^{-x}}\right)$,

or $-x < 1$ donc $t \mapsto \frac{1}{t^{-x}}$ est intégrable sur $]0; 1/2]$, donc $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $]0; 1/2]$.

Ceci assure l'existence de $f(x)$.

2. • Pour $t \in]0; 1[$, $x \mapsto g(x, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $] -1; +\infty[$.
- Pour $x > -1$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0; 1[$ (d'après 1)).
- Pour $x > -1$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = (t-1)t^x = t^{x+1} - t^x$ est continue.
- $[t \mapsto \frac{1}{t}$ n'étant pas intégrable sur $]0; 1[$, on va devoir éviter $-1!!!]$

Soit a tel que $-1 < a < 0$.

$$\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times]0; 1[, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = (1-t)t^x \leq t^x \leq t^a$$

$$(\text{car } t \in]0; 1[\implies \ln(t) < 0 \implies a \ln(t) \geq x \ln(t) \implies t^a \geq t^x)$$

or $\varphi : t \mapsto t^a = \frac{1}{t^{-a}}$ est intégrable sur $]0; 1[$ (car $a > -1$ donc $-a < 1$).

Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; +\infty[$, et ceci pour tout $a \in]-1; 0[$, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $] -1; +\infty[$.

3. h est continue sur $]0; 1[$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

De plus : $h(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ et $h(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} 1$, donc h est prolongeable en fonction continue sur le segment $[0; 1]$, donc h est bornée sur $]0; 1[$.

Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in]0; 1[, |h(t)| \leq M$.

$$\text{Alors : } \forall x > -1, \forall t \in]0; 1[, |f(x)| = \left| \int_0^1 h(t)t^x dt \right| \leq \int_0^1 |Mt^x| dt \leq \frac{M}{x+1}.$$

Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4. On a par dérivation sous l'intégrable :

$$\forall x > -1, f'(x) = \int_0^1 t^{x+1} - t^x dt = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Donc : } \exists K \in \mathbb{R}, \forall x > -1, f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1} + K$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+2}{x+1} = 0$ donc $K = 0$.

Ainsi : $\forall x > -1, f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1}$.