

Exercice 1 Équation matricielle (CCP 2019)

1. Montrer que $(A | B) = \text{Tr}(A^T B)$ munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'un produit scalaire.
2. Montrer que les sous-espaces des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux
3. En déduire que, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(M^T M = M^2) \iff (M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.
4. Montrer que, pour tout $n \geq 3$, il existe M non symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^T M = M^2$. On pourra chercher M sous la forme VU^T avec U et V dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
5. Montrer que toutes les solutions de $M^T M = M^2$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont symétriques.

Solution (Ex.1 – Équation matricielle (CCP 2019))

1. À savoir faire : $\text{Tr}((A | B)) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j} \dots$
2. Toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique $M = S + A$ avec $S = \frac{1}{2}(M + M^T) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Et pour S et A symétrique et antisymétrique respectivement :
 $(S | A) = \text{Tr}((S^T A)) = \text{Tr}((S A)) = \text{Tr}((A^T S)) = \text{Tr}((S^T A^T)) = \text{Tr}((S - A)) = -(S | A)$, donc $(A | S) = 0$, i.e. $S \perp A$.
3. • Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $M^T M = M^2 \dots$
• Soit $M = S + A$ telle que $M^T M = M^2$. Alors
 $(S - A)(S + A) = (S + A)^2$, donc $-AS - A^2 = AS + A^2$, donc $A^2 + AS = 0$, donc $AM = 0$, donc $M \perp A$. Comme $S \perp A$, alors $(M - S) \perp A$, i.e. $A \perp A$, donc $A = 0$, et $M = S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $M = VU^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$M^T M = M^2 \iff UV^T VU^T = VU^T VU^T \iff \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right) UU^T = \left(\sum_{i=1}^n u_i v_i \right) VU^T$$

Débrouillons nous pour que les deux sommes soient nulles :

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ conduit à } M = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ i & -1 & i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ matrice non}$$

symétrique vérifiant $M^T M = M^2$, valable à partir de $n = 3 \dots$

5. Supposons $M^T M = M^2$. En écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, en considérant le premier et le dernier coefficient de $M^T M$ et de M^2 , on a :
 $a^2 + c^2 = a^2 + bc$ et $b^2 + d^2 = bc + d^2$, donc $c^2 = bc$ et $b^2 = bc$.
Si $c \neq 0$, on en déduit $b = c$ et M est symétrique.
Si $c = 0$, alors $b^2 = 0$ donc $b = 0 = c$ et M est symétrique.

Exercice 2 Projections sur des droites et des hyperplans

Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$, muni du produit scalaire canonique.

1. a) Soit $U \in E \setminus \{0\}$ et $\Delta = \text{Vect}(U)$.
Montrer que $P = \frac{1}{\|U\|^2} UU^T$ est la matrice de la projection orthogonale sur Δ dans la base canonique.
b) En déduire la matrice Q représentant la projection orthogonale sur l'hyperplan $\Delta^\perp$.

Solution (Ex.2 – Projections sur des droites et des hyperplans)

1. a) Première méthode.

Comme $U^T U = \|U\|^2$, on vérifie sans souci que $P^2 = P$ et $P^T = P$, donc puisque la base canonique est orthonormale, P est une matrice de projection orthogonale.

Si $X \in E$, alors $PX = \frac{1}{\|U\|^2} UU^T X = \frac{\langle U, X \rangle}{\|U\|^2} U$, on a :

$$PU = U \text{ donc } \Delta \in E_1, \text{ et, pour } X \in \Delta^\perp, PX = 0 \text{ donc } X \in E_0,$$

ce qui prouve que P est la projection sur Δ parallèlement à $\Delta^\perp$.

Seconde méthode.

En posant $V = \frac{1}{\|U\|} U$, (V) est une base orthonormale de Δ , donc pour tout X

de E,

$$p_{\Delta}(X) = \langle V, X \rangle V = \frac{1}{\|U\|^2} U^T X U \text{ et comme } U^T X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}),$$

$$p_{\Delta}(X) = \frac{1}{\|U\|^2} U U^T X = P X \text{ en posant } P = \frac{1}{\|U\|^2} U U^T.$$

$$\text{b) } p_{\Delta} + p_{\Delta^{\perp}} = id \text{ donc } Q = I_n - P = I_n - \frac{1}{\|U\|^2} U U^T.$$

Exercice 3 Un endomorphisme autoadjoint de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et n un entier naturel au moins égal à 2.

Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère

$$\varphi : E \rightarrow E, M \mapsto aM + bM^T.$$

- Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
- a) Rappeler la définition du produit scalaire canonique de E.
b) Justifier que φ est diagonalisable.
- a) Déterminer les éléments propres de φ .
b) Préciser $\det(\varphi)$ et $\text{Tr}(\varphi)$.
- a) À quelle condition nécessaire et suffisante φ est-elle une projection orthogonale?
b) À quelle condition nécessaire et suffisante φ est-elle une symétrie orthogonale?

Solution (Ex.3 – Un endomorphisme autoadjoint de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

- Découle de la linéarité de la transposition.
- Avec le produit scalaire canonique $(A | B) = \text{Tr}(A^T B)$, on a pour tout $(A, B) \in E$,

$$(\varphi(A) | B) = \text{Tr}((aA + bA^T)^T B) = a \text{Tr}(A^T B) + b \text{Tr}(AB) \text{ et } \\ (A | \varphi(B)) = \text{Tr}(A(aB + bB^T)^T) = a \text{Tr}(AB^T) + b \text{Tr}(AB) \text{ et comme } \text{Tr}(AB^T) = \\ \text{Tr}((AB^T)^T) = \text{Tr}(BA^T) = \text{Tr}(A^T B), \text{ on a } \\ (\varphi(A) | B) = (A | \varphi(B)).$$

Donc φ est autoadjoint donc diagonalisable.
- a) Si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\varphi(S) = (a+b)S$, donc $a+b$ est une valeur propre de φ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset E_{a+b}(\varphi)$.
 Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors $\varphi(A) = (a-b)A$, donc $a-b$ est une valeur propre de φ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset E_{a-b}(\varphi)$.
 Notons que $b \neq 0$ donc $a+b \neq a-b$.

Comme $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$, on a $\mu(a+b) + \mu(a-b) \geq n^2$ et comme $n^2 = \dim(E)$, $\mu(a+b) + \mu(a-b) \leq n^2$.

Donc il n'y a pas d'autre valeur propre et

$$\text{Sp}(\varphi) = \{a+b, a-b\}, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = E_{a+b}(\varphi) \text{ et } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = E_{a-b}(\varphi).$$

$$\text{b) } \det(\varphi) = (a+b)^{\mu(a+b)} (a-b)^{\mu(a-b)} = (a+b)^{n(n+1)/2} (a-b)^{n(n-1)/2},$$

$$\text{Tr}(\varphi) = (a+b)\mu(a+b) + (a-b)\mu(a-b) = n^2 a + nb.$$

- Dans une base adaptée à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice représentant φ

$$\text{s'écrit par blocs } \begin{pmatrix} (a+b)I_p & 0 \\ 0 & (a-b)I_q \end{pmatrix}.$$

- Comme φ est autoadjoint, il suffit que ce soit un projecteur pour être un projecteur orthogonal.
 On a $\varphi^2 = \varphi$ si, et seulement si, $(a+b)^2 = a+b$ et $(a-b)^2 = a-b$ donc si, et seulement si, $(a+b=0, a-b=1)$ ou $(a+b=1, a-b=0)$ donc si, et seulement si, $(a, b) = (1/2, -1/2)$ ou $(a, b) = (1/2, 1/2)$, ou encore $a = 1/2$ et $b = \pm 1/2$.
- De la même façon,
 On a $\varphi^2 = id$ si, et seulement si, $(a+b)^2 = 1$ et $(a-b)^2 = 1$ donc si, et seulement si, $(a+b=1, a-b=-1)$ ou $(a+b=-1, a-b=1)$ donc si, et seulement si, $(a, b) = (0, 1)$ ou $(a, b) = (0, -1)$, ou encore $a = 0$ et $b = \pm 1$.

Exercice 4 Comment fabriquer des produits scalaires?

Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de E.

- Montrer que, si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, la forme

$$\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \longmapsto X^T S Y$$

est un produit scalaire.

- Soit $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire sur E de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$, et $S = ((E_i | E_j))_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 a) Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 b) Soit X et Y dans E. Exprimer $(X | Y)$ à l'aide de S.
 c) Que vaut S lorsque $(\cdot | \cdot)$ est le produit scalaire canonique?
- Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = A^T A$.
 a) Montrer que S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
 b) On suppose de plus que A est inversible. Montrer que S appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Solution (Ex.4 – Comment fabriquer des produits scalaires?)

1. Notons que $X^T S X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$, donc puisque S est symétrique $(X^T S X)^T = X^T S X$. Ce qui prouve la symétrie de φ .

La linéarité à droite ne pose pas de problème, et comme S est positive définie, φ est défini positif.

2. a) S est symétrique par symétrie du produit scalaire.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a

$$X^T S X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (E_i | E_j) x_i x_j = \sum_{i=1}^n (E_i | \sum_{j=1}^n x_j E_j) = (\sum_{i=1}^n x_i E_i | \sum_{j=1}^n x_j E_j) = (X | X) = \|X\|^2$$

donc $X^T S X \geq 0$ avec égalité si, et seulement si, $X = 0$, donc $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

b) Le calcul précédent en remplaçant le second X par Y donne

$$X^T S Y = (\sum_{i=1}^n x_i E_i | \sum_{j=1}^n y_j E_j) = (X | Y)$$

On peut aussi retrouver cette expression en partant de l'identité polaire

$$(X | Y) = \frac{1}{2} (\|X + Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2) = \frac{1}{2} ((X + Y)^T S (X + Y) - X^T S X - Y^T S Y) = \dots = X^T S Y$$

c) Si $(\cdot | \cdot)$ est le produit scalaire canonique, alors $S = I_n$.

3. a) $S^T = (A^T A)^T = A^T A = S$,

$\forall X \in E, \quad X^T S X = (AX)^T AX = \|AX\|_{canonique}^2 \geq 0$ donc $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

b) En supposant A inversible :

$X^T S X = 0 \implies \|AX\|_{canonique} = 0 \implies AX = 0 \implies A^{-1}AX = 0 \implies X = 0$ donc $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 5 Matrices de Hilbert

Soit $n \geq 2$ et H_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$[H_n]_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}.$$

1. Justifier que H_2 est définie et positive à l'aide de sa trace et de son déterminant.

2. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) En observant que $\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2} dt$, montrer que

$$X^T H_n X = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt.$$

b) En déduire que H_n est définie et positive.

Solution (Ex.5 – Matrices de Hilbert)

1. $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ donc H_2 est diagonalisable, avec pour valeurs propres

λ et μ (éventuellement égales) vérifiant

$\lambda \mu = \det(H - 2) = 1/12 > 0$ donc λ et μ sont non nulles de même signe,

$\lambda + \mu = \text{Tr}(H_2) = 4/3 > 0$ donc λ et μ sont strictement positives.

Donc $H_2 \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

$$2. a) \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i t^{i-1} y_j t^{j-1} dt = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \frac{1}{i+j-1} = X^T H_n X.$$

3. a) Supposons $X^T H_n X = 0$.

Notons $P : t \mapsto \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}$. Par positivité de l'intégrale, comme $P^2 \geq 0$,

$X^T H_n X \geq 0$.

Comme P^2 est continue et positive d'intégrale nulle sur $[0; 1]$, P^2 est nulle sur $[0; 1]$. Donc la fonction polynomiale P possède une infinité de racines, donc est nulle, donc a tous ses coefficients nuls. Donc $X = 0$.

Ainsi $H_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 6 Endomorphismes de $\mathbb{R}^3$

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, nature des l'endomorphismes f et g canoniquement associé à

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On déterminera de plus une base orthonormale de vecteurs propres de chacun d'eux.

Solution (Ex.6 – Endomorphismes de $\mathbb{R}^3$)

- f : projection orthogonale sur $\Delta = \text{Vect}((1, -1, 1))$.

Base possible : $\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2) \right)$

- g : réflexion (= symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan) d'axe $\Pi = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, -1))$.

Base possible : à nouveau $\mathcal{B}$ car $\Pi = \Delta^\perp$, donc $\text{SEP}(f, 1) = \Delta = \text{SEP}(g, -1)$ et $\text{SEP}(f, 0) = \Pi = \text{SEP}(g, 1)$.