

Exercice 1 Équation matricielle (CCP 2019)

1. Montrer que $(A | B) = \text{Tr}(A^T B)$ munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'un produit scalaire.
2. Montrer que les sous-espaces des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.
3. En déduire que, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(M^T M = M^2) \iff (M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.
4. Montrer que, pour tout $n \geq 3$, il existe M non symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^T M = M^2$. On pourra chercher M sous la forme VU^T avec U et V dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
5. Montrer que toutes les solutions de $M^T M = M^2$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont symétriques.

Exercice 2 Projections sur des droites et des hyperplans

Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$, muni du produit scalaire canonique.

1. a) Soit $U \in E \setminus \{0\}$ et $\Delta = \text{Vect}(U)$.
Montrer que $P = \frac{1}{\|U\|^2} U U^T$ est la matrice de la projection orthogonale sur Δ dans la base canonique.
b) En déduire la matrice Q représentant la projection orthogonale sur l'hyperplan $\Delta^\perp$.

Exercice 3 Un endomorphisme autoadjoint de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et n un entier naturel au moins égal à 2.

Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère

$$\varphi : E \rightarrow E, M \mapsto aM + bM^T.$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E .
2. a) Rappeler la définition du produit scalaire canonique de E .
b) Justifier que φ est diagonalisable.
3. a) Déterminer les éléments propres de φ .
b) Préciser $\det(\varphi)$ et $\text{Tr}(\varphi)$.
4. a) À quelle condition nécessaire et suffisante φ est-elle une projection orthogonale?
b) À quelle condition nécessaire et suffisante φ est-elle une symétrie orthogonale?

Exercice 4 Comment fabriquer des produits scalaires ?

Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de E .

1. Montrer que, si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, la forme

$$\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \longmapsto X^T S Y$$

est un produit scalaire.

2. Soit $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire sur E de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$, et $S = ((E_i | E_j))_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
b) Soit X et Y dans E . Exprimer $(X | Y)$ à l'aide de S .
c) Que vaut S lorsque $(\cdot | \cdot)$ est le produit scalaire canonique ?
3. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = A^T A$.
a) Montrer que S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
b) On suppose de plus que A est inversible. Montrer que S appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 5 Matrices de Hilbert

Soit $n \geq 2$ et H_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$[H_n]_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}.$$

1. Justifier que H_2 est définie et positive à l'aide de sa trace et de son déterminant.
2. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
a) En observant que $\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2} dt$, montrer que

$$X^T H_n X = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt.$$

- b) En déduire que H_n est définie et positive.

Exercice 6 Endomorphismes de $\mathbb{R}^3$

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, nature des l'endomorphismes f et g canoniquement associés à

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On déterminera de plus une base orthonormale de vecteurs propres de chacun d'eux.