

Deux extraits de sujets récents...

Exercice 1

On dispose d'une pièce de monnaie qui donne "pile" avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

On effectue une infinité de fois des lancers successifs de cette pièce de manière indépendante.

On admet qu'on peut modéliser la situation par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note P_n (respectivement F_n) l'événement "le n -ième lancer donne pile (respectivement face)".

Dans cet exercice toutes les variables aléatoires sont définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et discrètes à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Si X est l'une d'entre elles, on a donc $X(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

1. Pour une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, démontrer que :

$$\mathbb{P}(X = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n).$$

2. En utilisant une variable aléatoire de loi géométrique, démontrer que l'événement "la pièce donne au moins une fois pile" est de probabilité 1.

3. Dans cette question, on découpe les lancers par groupe de 3 lancers consécutifs et disjoints.

On note alors Y la variable aléatoire telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y = n$ lorsque la séquence PPF apparaît pour la première fois lors du $(n+1)$ -ième groupe de lancers (c'est-à-dire les lancers de rangs $3n+1$ à $3n+3$). Par exemple l'événement $(Y = 2)$ est réalisé lorsque les trois premiers lancers n'ont pas donné PPF, les lancers de rang 4 à 6 non plus, par contre aux lancers de rangs 7, 8 et 9 on a obtenu successivement "pile", "pile" et "face".

On dira aussi que $Y = +\infty$ lorsque la séquence PPF n'apparaît jamais.

Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y+1$ et en déduire que la séquence PPF apparaît au moins une fois avec probabilité 1.

On admettra dans la suite que n'importe quelle séquence apparaît au moins une fois avec la probabilité 1.

On note Z la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le mot PP pour la première fois. D'après la propriété admise on sait donc que $\mathbb{P}(Z = +\infty) = 0$.

4. Pour k un entier naturel supérieur ou égal à 2, on note A_k l'événement "les $(k-1)$ -ième et k -ième lancers donnent pile".

Démontrer que :

$$\forall k \geq 4, \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(Z \leq k-2) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z = k-1) + \mathbb{P}(Z = k).$$

5. En déduire que :

$$\forall k \geq 2, \frac{1}{4}\mathbb{P}(Z \geq k-1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z = k-1) + \mathbb{P}(Z = k).$$

6. Rappeler le résultat du cours reliant l'espérance de Z et la série $\sum \mathbb{P}(Z \geq n)$.

L'utiliser pour démontrer que Z est d'espérance finie et déterminer sa valeur.

7. Etablir que :

$$\forall k \geq 2, \mathbb{P}(Z = k+2) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(Z = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z = k+1).$$

et en déduire la fonction génératrice de Z .

8. Retrouver l'espérance de Z grâce à sa fonction génératrice.

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est notée I_n .

On appelle *racine carrée* de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ solution de l'équation $X^2 = A$.

On appelle polynôme en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ expression polynomiale de A et on note $\mathbb{C}[A]$ l'ensemble des polynômes en A :

$$\mathbb{C}[A] = \{P(A) | P \in \mathbb{C}[X]\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

1. a) Montrer que la matrice $A = I_2$ admet une infinité de racines carrées (on pourra utiliser la notion de symétrie).
 b) Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Exprimer $P(A)$ à l'aide de $P(1)$.
 c) Parmi les racines carrées de A , lesquelles sont dans $\mathbb{C}[A]$?
2. a) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que si X est une racine carrée de A , alors X est nilpotente.
 b) Montrer que A admet une infinité de racines carrées.
 c) Montrer que $\mathbb{C}[A] = \text{Vect}(I_3, A)$.
 d) Parmi les racines carrées de A , lesquelles sont dans $\mathbb{C}[A]$?
3. Dans la question suivante, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle qui est *définie positive*, c'est-à-dire que ses valeurs propres sont strictement positives.
 a) Montrer que A admet une racine carrée symétrique réelle définie positive.
 b) Montrer que cette racine carrée symétrique réelle définie positive de A est unique. (On pourra montrer que deux racines carrées de ce type possèdent les mêmes valeurs propres et sous-espaces propres.)